UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Moritz Weber
Stefan Jung

Übungen zur Vorlesung Analysis II
Sommersemester 2016

Blatt 11
Abgabe: Donnerstag, 14.07.2016, 10:00 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss des Gebäudes E2.5

Erinnerung: Hauptvektoren j-ter Stufe

(i) Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$. Ein Vektor f_j heißt *Hauptvektor j-ter Stufe* zum Eigenwert λ, falls $(A - \lambda\mathbb{1})^{j-1} f_j \neq 0$ aber $(A - \lambda\mathbb{1})^i f_j = 0$. Die Hauptvektoren 0-ter Stufe sind also die Eigenvektoren von A.

(ii) Ist f_0 ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, dann liefert die Rekursion

$$(A - \lambda\mathbb{1})\, f_{k+1} = f_k$$

einen Satz linear unabhängiger Hauptvektoren der Stufen $0, 1$ usw.. Ist die Gleichung zum ersten Mal für ein $k \in \mathbb{N}_0$ nicht mehr lösbar, dann existieren nur Hauptvektoren der Stufe $j = 0, \dots, k$.

Die so gefunden Hauptvektoren erfüllen folglich $f_{k-l} = (A - \lambda_i\mathbb{1})^l f_k$

Aufgabe 1 (15 Punkte)**.** In Satz 11.8 der Vorlesung wurde die Lösung eines AWPs $u' = Au$ mit $u(0) = x_0$ in der Form $e^{At}x_0$ angegeben. In dieser Aufgabe sollen Sie nun ein konkretes Schema zum Finden der Fundamentallösungen der DGL $u' = Au$ entwickeln:

Satz. Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ und die DGL $u' = Au$ gegeben. Ist A äquivalent zu einem einzigen Jordanblock J_i zum Eigenwert λ_i (vgl. Blatt 10) und sind $f_0, \dots, f_{n-1}$ Hauptvektoren der Stufe $0, 1, \dots, n-1$, dann ist ein Fundamentalsystem der DGL gegeben durch

$$\begin{aligned}
u_0(t) &= e^{\lambda_i t} f_0 \\
u_1(t) &= e^{\lambda_i t}\left(f_1 + \frac{t}{1}(A - \lambda_i\mathbb{1})^1 f_1\right) = e^{\lambda_i t}\sum_{l=0}^{1}\frac{t^l}{l!}(A - \lambda_i\mathbb{1})^l f_1 \\
&\vdots \\
u_{n-1}(t) &= e^{\lambda_i t}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{t^l}{l!}(A - \lambda_i\mathbb{1})^l f_{n-1}.
\end{aligned}$$

Ist A beliebig, also äquivalent zu einer Jordan-Matrix J (mit Blöcken $J_1, \dots, J_m$, vgl. Blatt 10), so ergibt sich ein Fundamentalsystem für die DGL durch die Vereinigung der Fundamentalsysteme für die einzelnen Jordanblöcke.

Sie können beim Beweis wie folgt vorgehen:

(a) Sei zunächst $A = J_i$ ein einziger Jordanblock. Auf Blatt 10 wurde die Identität

$$J_i^k = \begin{pmatrix} \binom{k}{0}\lambda_i^k & \dots & \binom{k}{n-1}\lambda_i^{k-(n-1)} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \binom{k}{0}\lambda_i^k \end{pmatrix}$$

gezeigt. Folgern Sie hieraus die Gleichheit

$$e^{J_i t} = e^{\lambda_i t} \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \dots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \frac{t}{1!} \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie dann, dass im Falle $A = J_i$ durch

$$\begin{aligned} u_0(t) &= e^{\lambda_i t}\tilde{f}_0 \\ u_1(t) &= e^{\lambda_i t}\left(\tilde{f}_1 + \frac{t}{1!}(J_i - \lambda_i \mathbb{1})^1 \tilde{f}_1\right) \\ &\vdots \\ u_{n-1}(t) &= e^{\lambda_i t}\left(\tilde{f}_{n-1} + \frac{t}{1}(J_i - \lambda_i \mathbb{1})^1 \tilde{f}_{n-1} + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}(J_i - \lambda_i \mathbb{1})^{n-1} \tilde{f}_{n-1}\right) \end{aligned}$$

ein Fundamentalsystem der DGL gegeben ist. Die $\tilde{f}_j$ sind hierbei Hauptvektoren j-ter Stufe (Welche Gestalt müssen die $\tilde{f}_j$ haben?). Hinweis: Nach dem Beweis von Satz 13.1 finden Sie ein Fundamentalsystem durch Betrachten von n-vielen geeigneten Anfangswertproblemen, die Sie gemäß Satz 11.8 lösen.)

(c) Sei nun A äquivalent zu einem einzigen Jordanblock J_i, d.h. $UAU^{-1} = J_i$ für ggeeignetes U.

Folgern Sie aus (b), dass die DGL $u' = Au$ das Fundamentalsystem

$$\begin{aligned} v_0(t) &= e^{\lambda_i t} f_0 \\ v_1(t) &= e^{\lambda_i t}\left(f_1 + \frac{t}{1}(A - \lambda_i \mathbb{1})^1 f_1\right) \\ &\vdots \\ v_{n-1}(t) &= e^{\lambda_i t}\left(f_{n-1} + \frac{t}{1}(A - \lambda_i \mathbb{1})^1 f_{n-1} + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}(A - \lambda_i \mathbb{1})^{n-1} f_{n-1}\right) \end{aligned}$$

besitzt, wobei $f_j := U^{-1}\tilde{f}_j$ (beliebige) Hauptvektoren der Stufe j von A sind.

bitte wenden

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Lösen Sie das folgende System von Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 8 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

und geben Sie die allgemeine Lösung $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))^\top$ an.

Aufgabe 3 (15 Punkte)**.** Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von Lösungen für folgende Differenzialgleichungen:

(a) $u'' + 4u' + 4u = 0$

(b) $u^{(5)} + u^{(4)} + 2u^{(3)} + 2u'' + u' + u = 0$

(c) $u^{(5)} + 4u^{(4)} + 2u^{(3)} - 4u'' + 8u' + 16u = 0$

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie alle Lösungen der Differenzialgleichung

$$u'' + 4u' + 4u = e^t.$$