UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2011/2012

Blatt 0

zur mündlichen Bearbeitung in der ersten Übungswoche.
Die Aufgaben werden nicht bewertet.

Aufgabe 1. Erinnern Sie sich an die folgenden Definitionen und Sätze aus den Vorlesungen Analysis I und II:

- Wann heißt eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrierbar*?

  Bemerkung: In der Analysis I wurden anstelle von Riemann-integrierbaren Funktionen *Regelfunktionen* betrachtet. Dort hatten wir schon gesehen (Satz 16.26), dass jede stetige Regelfunktion bereits Riemann-integrierbar ist. Allgemeiner kann man zeigen (vgl. Abschnitt 11.8 des Buchs Analysis I von K. Königsberger), dass dabei sogar noch auf die Forderung der Stetigkeit verzichtet werden kann, d.h. jede Regelfunktion ist bereits Riemann-integrierbar. Allerdings gibt es mehr Riemann-integrierbare Funktionen als Regelfunktionen. Beispielsweise ist die Funktion

  $$f : \; [0,1] \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

  Riemann-integrierbar aber keine Regelfunktion.

- Wie ist das *Daniell-Integral* definiert?

- Definieren Sie den Begriff *Nullmenge*.

Aufgabe 2. Gegeben seien die beiden Teilmengen

$$A := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \; (x+1)^2 + y^2 \leq 4\right\} \qquad \text{und} \qquad B := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \; (x-1)^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

der Ebene $\mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie:

(a) A und B.

(b) $A \cap B$ und $A \cup B$.

(c) $A \backslash B$ und $B \backslash A$.

(d) Die *symmetrische Differenz* $A \Delta B := (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

bitte wenden

Aufgabe 3. Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Wie sind $\bigcup_{i\in I} A_i$ und $\bigcap_{i\in I} A_i$ für eine Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Teilmengen von X definiert? Zeigen Sie:

(a) Für alle Teilmengen $A, B \subseteq X$ gilt

$$A\backslash(A\backslash B) = A \cap B.$$

(b) Ist $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von X, so gelten für alle $B \subseteq X$ die Aussagen:

$$\begin{aligned}\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) \cap B &= \bigcup_{i\in I}(A_i \cap B)\\ \Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) \cup B &= \bigcap_{i\in I}(A_i \cup B)\end{aligned}$$

(c) Ist $(A_i)_{i\in I}$ eine Familie von Teilmengen von X, so gelten die Regeln:

$$\begin{aligned}X\backslash\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) &= \bigcap_{i\in I}(X\backslash A_i)\\ X\backslash\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) &= \bigcup_{i\in I}(X\backslash A_i)\end{aligned}$$

Aufgabe 4. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen zwei nichtleeren Mengen X und Y. Wie sind das *Bild* $f(A)$ einer Menge $A \subseteq X$ und das *Urbild* $f^{-1}(B)$ einer Menge $B \subseteq Y$ definiert? Zeigen Sie:

(a) Für jede Familie $(B_i)_{i\in I}$ von Teilmengen von Y gelten die Aussagen:

$$\begin{aligned}f^{-1}\Big(\bigcup_{i\in I} B_i\Big) &= \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)\\ f^{-1}\Big(\bigcap_{i\in I} B_i\Big) &= \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)\end{aligned}$$

(b) Für jede Familie $(A_i)_{i\in I}$ von Teilmengen von X gilt

$$f\Big(\bigcup_{i\in I} A_i\Big) = \bigcup_{i\in I} f(A_i).$$

(c) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) f ist injektiv.

(ii) Für alle $A \subseteq X$ gilt $f^{-1}(f(A)) = A$.

(iii) Für alle Teilmengen A und B von X ist

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B).$$