UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2011/2012

Blatt 2
Abgabe: Donnerstag, 3.11.2011, 8:30 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra und μ ein Maß auf $\mathfrak{A}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für alle $A, B \in \mathfrak{A}$ gilt

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(b) Für alle $A, B \in \mathfrak{A}$ gilt

$$A \subseteq B \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(A) \leq \mu(B).$$

(c) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Mengen aus $\mathfrak{A}$, so gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$. Seien weiter eine Familie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen aus $\mathfrak{A}$ und $A \in \mathfrak{A}$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) Aus $A_n \nearrow A$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A).$$

(b) Aus $A_n \searrow A$ und $\mu(A_1) < \infty$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A).$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Wir betrachten den messbaren Raum $(\mathbb{N}, \wp(\mathbb{N}))$. Zeigen Sie:

(a) Durch

$$\mu: \ \wp(\mathbb{N}) \to [0,\infty], \ A \mapsto \begin{cases} |A|, & \text{falls } A \text{ endlich} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

wird ein Maß auf $\wp(\mathbb{N})$ (das sogenannte *Zählmaß*) definiert. Mit $|A|$ bezeichnen wir dabei die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge $A \in \wp(\mathbb{N})$.

bitte wenden

(b) In Aufgabe 2 (b) kann auf die Forderung $\mu(A_1) < \infty$ nicht verzichtet werden.

Aufgabe 4 (20 Punkte!). Sei $\hat{\mathbb{R}} := [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ und sei

$$h: \hat{\mathbb{R}} \to [-1,1],\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{1+|x|}, & x \in \mathbb{R} \\ 1, & x = \infty \\ -1, & x = -\infty \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung
$$\hat{d}: \hat{\mathbb{R}} \times \hat{\mathbb{R}} \to [0, \infty),\ (x,y) \mapsto |h(x) - h(y)|$$
ist eine Metrik auf $\hat{\mathbb{R}}$.

(b) Die Abbildung h ist ein Homöomorphismus von dem metrischen Raum $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{d})$ auf den metrischen Raum $[-1,1]$ mit der vom Betrag induzierten Metrik.

Hinweis: Eine Abbildung $f: X \to Y$ zwischen zwei metrischen Räumen X und Y heißt *Homöomorphismus*, falls f bijektiv ist und sowohl f als auch die Umkehrfunktion $f^{-1}: Y \to X$ stetig sind.

(c) $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{d})$ ist kompakt.

(d) Eine Menge $U \subseteq \hat{\mathbb{R}}$ ist genau dann eine Umgebung von ∞ (bzw. von $-\infty$) in $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{d})$, wenn ein $a \in \mathbb{R}$ existiert mit $(a, \infty] \subseteq U$ (bzw. $[-\infty, a) \subseteq U$).

(e) Die Inklusionsabbildung $J: \mathbb{R} \to \hat{\mathbb{R}}$ ist ein Homöomorphismus von $(\mathbb{R}, d_{|\cdot|})$ auf $(\mathbb{R}, \hat{d}|_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}})$.

(f) Jede in $(\hat{\mathbb{R}}, \hat{d})$ offene Menge ist abzählbare Vereinigung von Mengen der Form $[-\infty, a)$, (b, c) und $(d, \infty]$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

(g) Ist $(X, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum, so ist $f: X \to \hat{\mathbb{R}}$ genau dann $\mathfrak{A}$-messbar, wenn $f^{-1}((a, \infty]) \in \mathfrak{A}$ gilt für alle $a \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\mathfrak{B}(\hat{\mathbb{R}})$ von $\{(a, \infty] \mid a \in \mathbb{R}\}$ erzeugt wird.

Zusatzaufgabe* (10 Punkte). Sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ und seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A_i) < \infty$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$