UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2011/2012

Blatt 3
Abgabe: Donnerstag, 10.11.2011, 8:30 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei $(X,\mathfrak{A})$ ein messbarer Raum.

(a) Gegeben seien $\mathfrak{A}$-messbare Funktionen $f,g : X \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für alle $r > 0$ die Menge
$$\{x \in X|\ |f(x) - g(x)| < r\}$$
zu $\mathfrak{A}$ gehört.

(b) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Funktionen von X nach $\mathbb{R}$. Zeigen Sie:
$$\{x \in X|\text{ die Folge } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert in } \mathbb{R}\} \in \mathfrak{A}.$$
Hinweis: Betrachten Sie die Menge
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k,l=m}^{\infty} \left\{x \in X \,\middle|\, |f_k(x) - f_l(x)| < \frac{1}{n}\right\}.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $(X,\mathfrak{A})$ ein messbarer Raum. Zeigen Sie:

(a) Für eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) f ist eine einfache Funktion, d.h. f ist messbar und $f(X)$ besteht nur aus endlich vielen Punkten.

(ii) Es gibt (endlich viele) paarweise disjunkte Mengen $A_1,\dots,A_n \in \mathfrak{A}$ und Werte $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$, so dass
$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}.$$

(b) Sind $f,g : X \to \mathbb{R}$ zwei einfache Funktionen und sind $a,b \in \mathbb{R}$, so sind auch $af + bg$ und $f \cdot g$ einfache Funktionen.

(c) Sind $f,g : X \to \mathbb{R}$ zwei einfache Funktionen mit $f \leq g$, so gibt es paarweise disjunkte Mengen $A_1,\dots,A_n \in \mathfrak{A}$ und Werte $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ und $\beta_1,\dots,\beta_n \in \mathbb{R}$, so dass
$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j} \qquad \text{und} \qquad g = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \chi_{A_j}$$
mit $\alpha_j \leq \beta_j$ für $j = 1,\dots,n$ erfüllt ist.

bitte wenden

(d) Ist μ ein Maß auf $(X, \mathfrak{A})$ und ist $f : X \to \mathbb{R}$ eine einfache Funktion, so hängt der Wert

$$\int_X f(x) d\mu(x) := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j)$$

nicht von der Wahl der Darstellung

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}$$

mit paarweise disjunkten Mengen $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ und Werten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ ab.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei $(X, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum. Zeigen Sie:

(a) Für alle $a \in X$ ist durch

$$\delta_a : \ \mathfrak{A} \to [0, \infty], \ A \mapsto \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

ein Maß auf $\mathfrak{A}$ gegeben.

(b) Für alle $a \in X$ und jede messbare Funktion $f : X \to [0, \infty]$ gilt

$$\int_X f(x) d\delta_a(x) = f(a).$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei μ das in Aufgabe 3 von Blatt 2 definierte Zählmaß auf dem messbaren Raum $(\mathbb{N}, \wp(\mathbb{N}))$. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ genau dann μ-integrierbar ist, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ absolut konvergiert. Zeigen Sie weiter, dass in diesem Fall gilt:

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.**

(a) Beweisen Sie das *Lemma von Fatou*:

Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $f_n : X \to [0, \infty]$ für $n \in \mathbb{N}$ messbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_X \Big(\liminf_{n\to\infty} f_n \Big) d\mu \ \leq \ \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu. \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass in (1) auch die strikte Ungleichheit auftreten kann.

Hinweis: Aufgabe 4