**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

# Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2011/2012

## Blatt 4

**Abgabe:** Donnerstag, 17.11.2011, 8:30 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

---

**Aufgabe 1** (10 Punkte)**.** Wir setzen

$$\mathfrak{A} := \{A \subseteq \mathbb{R} |\ A \text{ ist Vereinigung von endlich vielen Intervallen}\}$$

und definieren

$$\mu :\ \mathfrak{A} \to [0,\infty],\ A = \dot{\bigcup_{k=1}^{n}} I_k \mapsto \sum_{k=1}^{n} L(I_k),$$

wobei wir mit

$$L(I) := \sup_{a,b\in I} |a-b|$$

die Länge eines Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}$ bezeichnen. Zeigen Sie:

(a) $\mathfrak{A}$ ist eine Algebra und $\mu$ ein Prämaß auf $\mathfrak{A}$.

(b) Das von $\mu$ induzierte äußere Maß $\mu^*$ ist translationsinvariant, d.h. für alle $A \subseteq \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mu^*(x + A) = \mu^*(A), \qquad \text{wobei} \qquad x + A := \{x + a |\ a \in A\}.$$

(c) Die $\sigma$-Algebra $\mathfrak{M}_\mu$ der bezüglich $\mu^*$ messbaren Mengen ist translationsinvariant, d.h. für alle $A \in \mathfrak{M}_\mu$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $(x + A) \in \mathfrak{M}_\mu$. (Insbesondere ist auch das Lebesgue-Maß $\lambda := \mu^*|_{\mathfrak{M}_\mu}$ translationsinvariant.)

**Aufgabe 2** (10 Punkte)**.** Sei $\lambda$ das auf die $\sigma$-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ der Borelmengen von $\mathbb{R}$ eingeschränkte Lebesgue-Maß. Zeigen Sie, dass jede Borel-messbare und Riemann-integrierbare Funktion $f : [a,b] \to [0,\infty)$ auch Lebesgue-integrierbar ist und dass in diesem Fall gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)d\lambda(x)$$

**Bemerkung:** Die Aussage bleibt auch dann noch gültig, wenn wir auf die Einschränkung $f \geq 0$ verzichten.

***bitte wenden***

**Aufgabe 3** (10 Punkte)**.** Bestimmen Sie die folgenden beiden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}}\, dx$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$

**Aufgabe 4** (10 Punkte)**.** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} na_n = 0.$$

**Aufgabe 5** (10 Punkte)**.** Sei $\mu$ ein Prämaß auf einer Algebra $\mathfrak{A} \subseteq \wp(X)$ und sei $\mu^*$ das von $\mu$ induzierte äußere Maß. Zeigen Sie, dass $\mu^*(A) = \mu(A)$ für alle Mengen $A \in \mathfrak{A}$ gilt.

**Zusatzaufgabe*** (10 Punkte)**.** Konstruieren Sie eine Teilmenge $E \subset \mathbb{R}$, die nicht Lebesgue-messbar ist.

**Hinweis**: Zur Konstruktion von $E$ benötigen Sie das Auswahlaxiom.