UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2011/2012

Blatt 5
Abgabe: Donnerstag, 24.11.2011, 8:30 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei X eine Menge und $\wp(X)$ ihre Potenzmenge. Wir nennen $\mathfrak{D} \subseteq \wp(X)$ ein λ-*System* (oder *Dynkin-System*), falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $X \in \mathfrak{D}$.

(ii) Für $A, B \in \mathfrak{D}$ mit $A \subseteq B$ gilt $B \backslash A \in \mathfrak{D}$.

(iii) Für eine Folge $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten Mengen in $\mathfrak{D}$ ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathfrak{D}$.

Man gebe ein Beispiel für ein λ-System, das keine σ-Algebra ist. Man zeige, dass ein λ-System $\mathfrak{D}$ genau dann eine σ-Algebra ist, wenn gilt

$$A, B \in \mathfrak{D} \quad \Longrightarrow \quad A \cap B \in \mathfrak{D}.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $\mathfrak{F}$ eine Teilmenge von $\wp(X)$ und sei $\lambda(\mathfrak{F})$ bzw. $\sigma(\mathfrak{F})$ das von $\mathfrak{F}$ erzeugte λ-System bzw. die von $\mathfrak{F}$ erzeugte σ-Algebra. Zeigen Sie: Hat $\mathfrak{F}$ die Eigenschaft

$$A, B \in \mathfrak{F} \quad \Longrightarrow \quad A \cap B \in \mathfrak{F}, \tag{1}$$

so gilt $\lambda(\mathfrak{F}) = \sigma(\mathfrak{F})$.

Ein Mengensystem $\mathfrak{F} \subseteq \wp(X)$, das die Bedingung (1) erfüllt, nennen wir π-*System* (oder *durchschnittsstabil*).

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Seien μ_1, μ_2 zwei Maße auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A} \subseteq \wp(X)$. Zeigen Sie: Gibt es ein π-System $\mathfrak{F} \subseteq \wp(X)$ mit den Eigenschaften

(i) $\mathfrak{A} = \sigma(\mathfrak{F})$.

(ii) $\mu_1|_{\mathfrak{F}} = \mu_2|_{\mathfrak{F}}$.

(iii) Es gibt eine Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen aus $\mathfrak{F}$ mit $\mu_1(F_n) = \mu_2(F_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = X$.

dann gilt $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathfrak{A}$.

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei $X = (0,1] \cap \mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $\mathfrak{A}$ aller endlichen Vereinigungen von Intervallen der Form $(a,b] \cap \mathbb{Q}$ mit $0 \leq a < b \leq 1$ und $a, b \in \mathbb{Q}$ ist eine Algebra.

(b) Durch $\mu((a,b] \cap \mathbb{Q}) = \infty$ und $\mu(\emptyset) = 0$ wird ein Prämaß μ auf $\mathfrak{A}$ definiert. Wie sieht das von μ induzierte äußere Maß μ^* aus?

(c) Die Fortsetzung von μ auf die kleinste σ-Algebra, die $\mathfrak{A}$ enthält, ist nicht eindeutig.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei $\mu : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty)$ ein endliches Maß. Wir definieren die zugehörige *Verteilungsfunktion* durch

$$F_\mu : \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \mu((-\infty, x]).$$

Zeigen Sie:

(a) Die Funktion F_μ ist rechtsseitig stetig, d.h. für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x \searrow x_0} F_\mu(x) = F_\mu(x_0)$$

(b) Die Funktion F_μ ist genau dann an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ linksseitig stetig, d.h. es gilt

$$\lim_{x \nearrow x_0} F_\mu(x) = F_\mu(x_0),$$

wenn $\mu(\{x_0\}) = 0$ ist.

Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion für

- das Dirac-Maß $\delta_a : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty)$ zu $a \in \mathbb{R}$.
- das Maß
$$\mu : \ \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty), \ A \mapsto \lambda(A \cap [0,1]),$$
wobei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ bezeichne.

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Zeigen Sie Bemerkung 2.13 (2) der Vorlesung:

Ist μ ein σ-endliches Prämaß auf einer Algebra $\mathfrak{A}$ und μ^* das von μ induzierte äußere Maß, so ist $(X, \mathfrak{M}_\mu, \overline{\mu})$ mit $\overline{\mu} := \mu^*|_{\mathfrak{M}_\mu}$ die Vervollständigung von $(X, \sigma(\mathfrak{A}), \mu^*|_{\sigma(\mathfrak{A})})$.