UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2011/2012

Blatt 6
Abgabe: Donnerstag, 1.12.2011, 8:30 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Wir definieren $\mathfrak{I} := \{(a,b] | -\infty \leq a < b \leq \infty\}$ und

$$\mathfrak{A} := \{A \subseteq \hat{\mathbb{R}} | \ A \text{ ist Vereinigung von endlich vielen disjunkten Intervallen aus } \mathfrak{I}\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathfrak{A}$ ist eine Algebra über $(-\infty, \infty]$.

(b) Ist $h : \hat{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende und rechtsseitig stetige Funktion mit $h(-\infty) = 0$, so ist durch

$$\mu_h : \ \mathfrak{A} \to [0, \infty), \ A = \dot{\bigcup_{k=1}^{n}} I_k \mapsto \sum_{k=1}^{n} L(I_k)$$

mit

$$L : \ \mathfrak{I} \to \mathbb{R}, \ I = (a,b] \mapsto h(b) - h(a)$$

ein wohldefiniertes, endliches Prämaß auf $\mathfrak{A}$ gegeben. Zeigen Sie weiter, dass das durch μ_h induzierte äußere Maß μ_h^* ebenfalls endlich ist und dass alle Borelmengen $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ bereits μ_h-messbar sind.

Wir nennen $\lambda_h := \mu_h^*|_{\mathfrak{B}(\mathbb{R})}$ das *Lebesgue-Stieltjes-Maß* zu h und schreiben für das zugehörige *Lebesgue-Stieltjes-Integral* einer Borel-messbaren Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ kurz

$$\int_{[a,b]} f(x) dh(x) := \int_{[a,b]} f(x) d\lambda_h(x).$$

(c) Ist $h : \hat{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende und rechtsseitig stetige Funktion mit $h(-\infty) = 0$, so ist $F_{\lambda_h} = h|_{\mathbb{R}}$.
Umgekehrt erfüllt F_μ für jedes endliche Maß μ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ die Voraussetzungen von Aufgabenteil (b) und es gilt $\lambda_{F_\mu} = \mu$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei μ ein endliches Maß auf der σ-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ der Borelmengen, dessen Verteilungsfunktion $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist. Sei weiter $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Zeigen Sie:

bitte wenden

(a) Bezeichnen wir mit λ das Lebesgue-Maß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, so ist durch

$$\nu: \ \mathfrak{B}(I) \to [0,\infty), \ A \mapsto \int_A F'_\mu(x) d\lambda(x)$$

ein endliches Maß auf $\mathfrak{B}(I)$ gegeben.

(b) Es gilt $\mu|_{\mathfrak{B}(I)} = \nu$.

(c) Jede Borel-messbare und Riemann-integrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist auch μ-integrierbar und es gilt

$$\int_{[a,b]} f(x) d\mu(x) = \int_a^b f(x) F'_\mu(x) dx.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $(Y, \mathfrak{M})$ ein messbarer Raum. Sei weiter $T : X \to Y$ eine messbare Abbildung und $T(\mu)$ das Bildmaß von μ auf $\mathfrak{M}$. Zeigen Sie, dass für jede messbare Funktion $f : Y \to \mathbb{C}$ die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:

(i) $f : Y \to \mathbb{C}$ ist integrierbar bezüglich $T(\mu)$.

(ii) $f \circ T : X \to \mathbb{C}$ ist integrierbar bezüglich μ.

Zeigen Sie weiter, dass in diesem Fall gilt:

$$\int_Y f(y) dT(\mu)(y) = \int_X f(T(x)) d\mu(x)$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Verwenden Sie den Satz von Fubini sowie die Beziehung

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xt} dt \qquad \text{für } x > 0,$$

um zu zeigen, dass

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei K der Durchschnitt der beiden Zylinder

$$Z_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \ x^2 + z^2 \leq 1\} \qquad \text{und} \qquad Z_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \ y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Berechnen Sie das Volumen von K.

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, also ein Maßraum mit der Eigenschaft $\mu(X) = 1$, und sei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine auf dem Intervall $I := [a,b]$ konvexe Funktion, d.h. für alle $x, y \in I$ gelte

$$\varphi\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)\varphi(x) + t\varphi(y) \qquad \text{für alle } t \in [0,1].$$

Zeigen Sie:

(a) $\varphi|_{(a,b)}$ ist stetig. Insbesondere ist φ Borel-messbar.

(b) Für eine μ-integrierbare Funktion $f : X \to I$ ist $\int_X f(x) d\mu(x) \in I$ und es gilt

$$\varphi\Big(\int_X f(x) d\mu(x)\Big) \leq \int_X \varphi(f(x)) d\mu(x).$$