UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2011/2012

Blatt 7
Abgabe: Donnerstag, 8.12.2011, 8:30 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Seien X_1, X_2 zwei nichtleere Mengen und seien $\mathfrak{F}_1 \subseteq \wp(X_1)$, $\mathfrak{F}_2 \subseteq \wp(X_2)$ mit $X_1 \in \mathfrak{F}_1$, $X_2 \in \mathfrak{F}_2$ gegeben. Zeigen Sie: Sind $\mathfrak{M}_1 = \sigma(\mathfrak{F}_1)$ und $\mathfrak{M}_2 = \sigma(\mathfrak{F}_2)$ die von $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ erzeugten σ-Algebren, so wird die Produkt-σ-Algebra $\mathfrak{M}_1 \otimes \mathfrak{M}_2$ erzeugt von

$$\big\{A_1 \times A_2 |\ A_1 \in \mathfrak{F}_1,\ A_2 \in \mathfrak{F}_2\big\}.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $\mathbb{S}_{k-1} := \{u \in \mathbb{R}^k |\ \|u\| = 1\}$ die Einheitssphäre in $\mathbb{R}^k$ bezüglich der euklidischen Norm $\|\cdot\|$.

(a) Zeigen Sie, dass jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^k \backslash \{0\}$ eine eindeutige Darstellung der Form $x = ru$ mit $r > 0$ und $u \in \mathbb{S}_{k-1}$ hat.

Wir können daher $\mathbb{R}^k \backslash \{0\}$ mit dem kartesischen Produkt $(0,\infty) \times \mathbb{S}_{k-1}$ identifizieren.

(b) Es bezeichne λ_k das auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)$ eingeschränkte Lebesgue-Maß. Zeigen Sie, dass durch

$$\sigma_{k-1}(A) := k \cdot \lambda_k(\widetilde{A}) \qquad \text{mit} \qquad \widetilde{A} := \{ru |\ r \in (0,1),\ u \in A\}$$

ein endliches Maß $\sigma_{k-1}:\ \mathfrak{B}(\mathbb{S}_{k-1}) \to [0,\infty)$ definiert wird.

(c) Beweisen Sie: Für jede Borel-messbare Funktion $f : \mathbb{R}^k \to [0,\infty)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^k} f(x) d\lambda_k(x) = \int_{(0,\infty)} \left(\int_{\mathbb{S}_{k-1}} f(ru) d\sigma_{k-1}(u) \right) r^{k-1} d\lambda_1(r).$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 3 von Blatt 6.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Auf $Q := (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ sei die folgende Funktion gegeben:

$$f:\ Q \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \frac{1}{1-xy}$$

bitte wenden

(a) Zeigen Sie, dass f auf Q Lebesgue-integrierbar ist und berechnen Sie den Wert des Integrals

$$I = \int_Q f(x,y) d\lambda_2(x,y)$$

mit Hilfe der Substitution

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

(b) Zeigen Sie unter Verwendung von Aufgabenteil (a), dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Reihenentwicklung von f.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.**

(a) Zeigen Sie: Ist $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$ und sind $1 \leq p \leq q \leq \infty$ gegeben, so gilt $L^p(\mu) \supseteq L^q(\mu)$.

(b) Geben Sie ein Beispiel eines Maßraums $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ an, in dem für $1 \leq p < q \leq \infty$ die umgekehrte Inklusion $L^p(\mu) \subsetneqq L^q(\mu)$ gilt.

(c) Geben Sie auch ein Beispiel eines Maßraums $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ an, in dem für $1 \leq p < q \leq \infty$ weder $L^p(\mu) \subseteq L^q(\mu)$ noch $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$ erfüllt ist.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $f \in L^\infty(\mu)$ gilt

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

(b) Sei $f \in \bigcap_{p>1} L^p(\mu)$ gegeben, so dass $\lim\limits_{p \to \infty} \|f\|_p$ in $\mathbb{R}$ existiert. Muss dann schon $f \in L^\infty(\mu)$ gelten?

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** In der Analysis II wurde gezeigt: Für jede auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \qquad \text{für alle } (x_0, y_0) \in \Omega.$$

Geben Sie hierfür mit Hilfe des Satzes von Fubini einen neuen Beweis.

Hinweis: Integrieren Sie beide Seiten über eine geeignete Menge und schließen Sie indirekt.