UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2011/2012

Blatt 8

Abgabe: Donnerstag, 15.12.2011, 8:30 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2+y^2 \leq 1\}$. Berechnen Sie für $n, m \in \mathbb{N}_0$ die beiden Integrale

$$\int_D (x+\mathrm{i}y)^n (x-\mathrm{i}y)^m d\lambda^2(x,y) \qquad \text{und} \qquad \int_{\mathbb{S}_1} (x+\mathrm{i}y)^n (x-\mathrm{i}y)^m d\sigma_1(x,y).$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei f eine messbare Funktion auf einem Maßraum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Zeigen Sie:

(a) Sind $1 \leq p, q < \infty$ und $0 < \theta < 1$ gegeben und ist $r \geq 1$ bestimmt durch

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q},$$

so gilt die Ungleichung

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{1-\theta} \|f\|_q^{\theta}.$$

(b) Sind $1 \leq p < q < \infty$ gegeben, so gilt für alle $p \leq r \leq q$

$$L^p(X) \cap L^q(X) \subseteq L^r(X).$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie:

(a) Für eine positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax, x\rangle} d\lambda^n(x) = \pi^{\frac{n}{2}} \big(\det(A)\big)^{-\frac{1}{2}}.$$

(b) Sind $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ positiv definit, so gilt für alle $\theta \in [0,1]$

$$\det(\theta A + (1-\theta)B) \geq (\det(A))^{\theta} (\det(B))^{1-\theta}.$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.**

(a) Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir bezeichnen mit $\mathcal{S}$ die Menge aller einfachen Funktionen $s : X \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$\mu\big(\{x \in X |\ s(x) \neq 0\}\big) < \infty$$

Zeigen Sie: Für $1 \leq p < \infty$ liegt $\mathcal{S}$ dicht in $L^p(X, \mu)$.

bitte wenden

(b) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Lusin, dass $C[0,1]$ für $1 \leq p < \infty$ dicht in $L^p([0,1], \lambda^1)$ liegt.

(c) Liegt $C[0,1]$ auch dicht in $L^\infty([0,1], \lambda^1)$?

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Für $1 \leq p < \infty$ definieren wir

$$\ell^p(\mathbb{N}) := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \middle| \; a_n \in \mathbb{C}, \; \sum_{n=1}^\infty |a_n|^p < \infty \right\}$$

und

$$\| \cdot \|_p : \; \ell^p(\mathbb{N}) \to [0, \infty), \; (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \left(\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für $1 \leq p < \infty$ ist $(\ell^p(\mathbb{N}), \| \cdot \|_p)$ ein vollständiger normierter Raum.

(b) Für $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist durch

$$(T(b))(a) := \sum_{n=1}^\infty a_n b_n \qquad \text{für } a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N}) \text{ und } b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q(\mathbb{N})$$

eine wohldefinierte Abbildung $T : \ell^q(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})^*$ gegeben.

Bemerkung: Ist $(X, \| \cdot \|)$ ein Banachraum über $\mathbb{K}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, so bezeichnen wir mit X^* die Menge aller beschränkten linearen Funktionale $\varphi : X \to \mathbb{K}$ und nennen X^* den *Dualraum* zu X.

(c) Die in Aufgabenteil (b) definierte Abbildung T ist ein Isomorphismus (also stetig, linear und bijektiv mit stetiger Umkehrabbildung).

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Lebesgue-messbare Funktion, die die Funktionalgleichung

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}$$

erfüllt. Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes von Lusin, dass gilt

$$f(x) = x f(1) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Satz (von Lusin, Satz 2.24 - Rudin)**.** Gegeben sei eine nichtleere Borel-messbare Menge $X \subseteq \mathbb{R}$. Seien weiter $B \in \mathfrak{B}(X)$ mit $\lambda^1(B) < \infty$ und eine messbare Funktion $f : X \to \mathbb{C}$ mit $f(x) = 0$ für alle $x \notin B$ gegeben. Dann gibt es für alle $\varepsilon > 0$ eine Funktion $g \in C_c(X)$ mit

$$\lambda^1\big(\{x \in X | \; g(x) \neq f(x)\}\big) < \varepsilon$$

und

$$\sup_{x\in X} |g(x)| \leq \sup_{x\in X} |f(x)|.$$