UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2011/2012

Blatt 9

Abgabe: Donnerstag, 22.12.2011, 8:30 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Dieses Blatt enthält 6 Aufgaben, von denen Sie aber nur 5 bearbeiten müssen!

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Wir betrachten den Raum

$$\ell^\infty(\mathbb{N}) := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, a_n \in \mathbb{C},\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty \right\}$$

sowie die Abbildung

$$\|\cdot\|_\infty :\ \ell^\infty(\mathbb{N}) \to [0,\infty),\ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|.$$

Zeigen Sie:

(a) $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.

(b) Der Raum

$$c_0(\mathbb{N}) := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, a_n \in \mathbb{C},\ \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \right\}$$

ist ein abgeschlossener Untervektorraum von $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$.

(c) Durch

$$(T(b))(a) := \sum_{n=1}^\infty a_n b_n \qquad \text{für } a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ und } b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

werden Isomorphismen

$$T :\ \ell^1(\mathbb{N}) \to c_0(\mathbb{N})^* \qquad \text{und} \qquad T :\ \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \ell^1(\mathbb{N})^*$$

definiert.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.**

(a) Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter $\mathbb{C}$-Vektorraum. Zeigen Sie: Ist X endlich-dimensional, so ist jede lineare Abbildung $T : X \to Y$ zwischen X und einem weiteren normierten $\mathbb{C}$-Vektorraum $(Y, \|\cdot\|_Y)$ stetig.

(b) Geben Sie ein Beispiel eines **unstetigen** Funktionals $\varphi : X \to \mathbb{C}$ auf einem komplexen Banachraum $(X, \|\cdot\|)$.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass jeder Vektorraum eine Basis (im Sinne der Linearen Algebra) hat.

bitte wenden

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum.

(a) Sei $\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}$ ein Unterhilbertraum. Für $x \in \mathcal{H}$ setzen wir $Px := x_0$, wobei $x_0 \in \mathcal{H}_0$ durch

$$\|x - x_0\| = \operatorname{dist}(x, \mathcal{H}_0)$$

bestimmt ist. Zeigen Sie:

(i) $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ist eine lineare Abbildung.

(ii) Für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt $\|Px\| \leq \|x\|$.

(iii) $P^2 = P = P^*$.

(iv) Es gilt $\ker(P) = \mathcal{H}_0^\perp$ und $\operatorname{ran}(P) = \mathcal{H}_0$.

Wir nennen P die orthogonale Projektion von $\mathcal{H}$ auf $\mathcal{H}_0$.

(b) Eine Abbildung $P : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ ist genau dann eine orthogonale Projektion von $\mathcal{H}$ auf einen Unterhilbertraum $\mathcal{H}_0$, wenn $P \in B(\mathcal{H})$ und $P^2 = P = P^*$ gilt.
(Die Definitionen 8.10 und 9.13 (5) der Vorlesung sind also äquivalent.)

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei $(\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein komplexer Hilbertraum. Zeigen Sie:

(a) Hat $A \in B(\mathcal{H})$ die Eigenschaft, dass $\langle Ax, x\rangle = 0$ für alle $x \in \mathcal{H}$ gilt, so ist $A = 0$.

(b) Ein Operator $A \in B(\mathcal{H})$ erfüllt genau dann $A = A^*$, wenn $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ ist für alle $x \in \mathcal{H}$.

(c) Für selbstadjungiertes $A \in B(\mathcal{H})$ gilt

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|.$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Auf $(\ell^2(\mathbb{N}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ definieren wir

$$L : \ \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N}), \ (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots).$$

(a) Berechnen Sie den zu L adjungierten Operator L^* und zeigen Sie $LL^* = \mathrm{id}$.

(b) Bestimmen Sie $\|L\|$.

(c) Zeigen Sie, dass $P := L^*L$ die orthogonale Projektion von $\ell^2(\mathbb{N})$ auf einen Unterhilbertraum $\mathcal{H}_0$ von $\ell^2(\mathbb{N})$ ist. Wie sieht $\mathcal{H}_0$ aus?

Aufgabe 6 (10 Punkte)**.** Sei λ das auf $\mathfrak{B}([0,1])$ eingeschränkte Lebesgue-Maß. Sei weiter $f \in L^\infty([0,1], \lambda)$ gegeben. Wir setzen $M_f g := fg$ für alle $g \in L^2([0,1], \lambda)$.

(a) Zeigen Sie, dass hierdurch ein linearer und stetiger Operator

$$M_f : \ L^2([0,1], \lambda) \to L^2([0,1], \lambda)$$

definiert wird.

(b) Bestimmen Sie $\|M_f\|$.

(c) Berechnen Sie den zu M_f adjungierten Operator M_f^*.