UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2011/2012

Blatt 10

Abgabe: Donnerstag, 12.1.2012, 8:30 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

---

*Die Bearbeitung der Aufgaben ist **freiwillig**. Bewertet werden **nur 5 Aufgaben**. Sie können also **50 Zusatzpunkte** erreichen.*

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Gegeben seien $r, h > 0$. Wir setzen

$$S := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 \leq z \leq h,\ x^2 + y^2 \leq \frac{r^2 z}{h} \right\}$$

und

$$Z := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 \leq z \leq h,\ x^2 + y^2 \leq r^2 \right\}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\lambda^3(S) = \frac{1}{2}\lambda^3(Z).$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Für $a, b \in \mathbb{R}$ betrachten wir

$$L := \left\{ (x, ax+b) \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie, dass $\lambda^2(L) = 0$.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei $K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt. Bestimmen Sie

$$\lim_{k \to \infty} \int_K \big(\sin(x+y)\big)^k d\lambda^2(x,y).$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(1,1)$, also

$$\Delta = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq y \leq x \leq 1 \right\}.$$

Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Fubini

$$\int_\Delta \frac{\sin(x)}{x} d\lambda^2(x,y).$$

bitte wenden

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei $a > 0$ gegeben. Wir setzen

$$L := \left\{ \big(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\big) \,\middle|\, r^2 \leq 2a^2\cos(2\varphi),\ r \geq 0,\ -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Skizzieren Sie L und berechnen Sie unter Verwendung von Polarkoordinaten $\lambda^2(L)$.

Aufgabe 6 (10 Punkte)**.** Gegeben sei $\alpha > -1$. Bestimmen Sie für $R > 0$ den Grenzwert

$$\lim_{r \searrow 0} \int_{A(r,R)} \left(x^2 + y^2\right)^\alpha d\lambda^2(x, y),$$

wobei

$$A(r, R) := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \ r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2 \right\}.$$

Aufgabe 7 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie:

(a) Jede Folge $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ definiert durch

$$M_a b := (a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{für alle } b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$$

einen Operator $M_a \in B(\ell^2(\mathbb{N}))$.

(b) Für $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ ist M_a genau dann kompakt, wenn die Folge a zu $c_0(\mathbb{N})$ gehört.

Aufgabe 8 (10 Punkte)**.** Es bezeichne λ das auf $\mathfrak{B}([0, 1])$ eingeschränkte Lebesgue-Maß. Wir definieren

$$A : \ L^2([0, 1], \lambda) \to L^2([0, 1], \lambda)$$

durch $(Af)(t) := tf(t)$ für alle $f \in L^2([0, 1], \lambda)$. Zeigen Sie:

(a) Der Operator A ist linear, stetig und selbstadjungiert.

(b) Für das Punktspektrum bzw. Spektrum gilt $\sigma_P(A) = \emptyset$ bzw. $\sigma(A) = [0, 1]$.

(c) Jedes $t \in \sigma(A)$ ist ein approximativer Eigenwert von A, d.h. es gibt zu t eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen aus $L^2([0, 1], \lambda)$ mit $\|f_n\|_2 = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $\|Af_n - tf_n\|_2 \to 0$ für $n \to \infty$.

Aufgabe 9 (10 Punkte)**.** Es bezeichne λ das auf $\mathfrak{B}([0, 1])$ eingeschränkte Lebesgue-Maß. Sei weiter $V : L^2([0, 1], \lambda) \to L^2([0, 1], \lambda)$ der aus der Vorlesung bekannte *Volterra-Operator*. Zeigen Sie:

(a) V^* ist gegeben durch

$$(V^*f)(x) = \int_{[x,1]} f(t)d\lambda(t) \qquad \text{für } x \in [0, 1].$$

(b) Ist $f \in L^2([0, 1])$ ein Eigenvektor von V^*V zu einem Eigenwert $\lambda \in \sigma_P(V^*V)$, so gibt es ein $A \in \mathbb{C}$ und ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $f(x) = A\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)x\right)$ und $\lambda = \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^{-2}$.

(c) Es gilt $\|V\| = \frac{2}{\pi}$. Verwenden Sie dabei, dass V ein kompakter Operator ist und daher $\|V^*V\| = \max\limits_{\lambda\in\sigma_P(V^*V)} |\lambda|$ gilt.

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten
und einen guten Rutsch ins neue Jahr!