UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2011/2012

Blatt 11
Abgabe: Donnerstag, 19.1.2012, 8:30 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Auf dem komplexen Hilbertraum $(\ell^2(\mathbb{N}), \langle\cdot,\cdot\rangle)$ betrachten wir den aus Aufgabe 5 von Blatt 9 bekannten Operator

$$L: \ \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N}), \ (x_1, x_2, x_3, \dots) \mapsto (x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ ist

$$W(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} L^n$$

konvergent in $B(\ell^2(\mathbb{N}))$ und es gilt

$$W(z)(z-L) = \mathrm{id} \qquad \text{und} \qquad (z-L)W(z) = \mathrm{id}\,.$$

(b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gehört $\psi(z) := (z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu $\ell^2(\mathbb{N})$ und es gilt

$$L\psi(z) = z\psi(z).$$

(c) Es gilt

$$\sigma(L) = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| \leq 1\} \qquad \text{und} \qquad \sigma_P(L) = \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1\}.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie:

(a) Ist $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit zweimal stetig partiell differenzierbaren Komponentenfunktionen F_1, F_2, F_3, dann gilt

$$\mathrm{div}(\mathrm{rot}\, F) = 0.$$

(b) Ist $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so gilt

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\, f) = 0.$$

(c) Ist $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit stetig differenzierbaren Komponentenfunktionen F_1, F_2, F_3 und ist $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar, dann gilt

$$\mathrm{div}(f \cdot F) = f \cdot \mathrm{div}\, F + \langle F, \mathrm{grad}\, f\rangle,$$

wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

bitte wenden

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Welche der folgenden Vektorfelder $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind Gradientenfelder? Bestimmen Sie gegebenenfalls auch eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $F = \operatorname{grad} f$.

(a) $F:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x, y)$

(b) $F:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (xy, xy)$

(c) $F:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x^2 + y^2, 2xy)$

Zur Erinnerung: Ein Vektorfeld $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *Gradientenfeld*, falls es eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt mit $F = \operatorname{grad} f$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ gegeben. Es bezeichne σ_{k-1} das in Aufgabe 2 von Blatt 7 konstruierte Maß auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}_{k-1} := \{x \in \mathbb{R}^k |\ \|x\| = 1\}$. Weiter sei $\mathbb{B}_k := \{x \in \mathbb{R}^k |\ \|x\| \leq 1\}$ die Einheitskugel in $\mathbb{R}^k$.
Für ein Vektorfeld $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ mit stetig differenzierbaren Komponentenfunktionen liefert der Satz von Gauß dann die folgende Aussage:

$$\int_{\mathbb{B}_k} \operatorname{div} F(x) d\lambda^k(x) = \int_{\mathbb{S}_{k-1}} \langle F(u), u \rangle d\sigma_{k-1}(u)$$

Verifizieren Sie diese Formel im Fall $k = 2$ für das Vektorfeld

$$F:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1^3, x_2^3)$$

indem Sie die folgenden Schritte durchführen:

(a) Wenden Sie die Formel aus Aufgabe 2 (c) von Blatt 7 auf die Funktion

$$f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ x \mapsto \langle F(x), x \rangle$$

an und zeigen Sie damit

$$\int_{\mathbb{S}_1} \langle F(u), u \rangle d\sigma_1(u) = 6 \int_{\mathbb{B}_2} f(x) d\lambda^2(x).$$

(b) Berechnen Sie unter Verwendung von Polarkoordinaten die beiden Integrale

$$\int_{\mathbb{B}_2} f(x) d\lambda^2(x) \qquad \text{und} \qquad \int_{\mathbb{B}_2} \operatorname{div} F(x) d\lambda^2(x).$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Es sei (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Mit (dx, dy, dz) bezeichnen wir die dazu duale Basis. Seien weiter $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie:

$$(a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz) \wedge (b_1 dy\, dz + b_2 dz\, dx + b_3 dx\, dy) = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i b_i \right) dx\, dy\, dz$$