UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2011/2012

Blatt 12
Abgabe: Donnerstag, 26.1.2012, 8:30 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei E ein n-dimensionaler reeller Vektorraum. Gegeben seien Linearformen $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in E^*$ mit $p \leq n$. Zeigen Sie, dass für alle Vektoren $v_1, \dots, v_p \in E$ die folgende Formel gilt:

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_p)(v_1, v_2, \dots, v_p) = \det \begin{pmatrix} \alpha_1(v_1) & \alpha_1(v_2) & \dots & \alpha_1(v_p) \\ \alpha_2(v_1) & \alpha_2(v_2) & \dots & \alpha_2(v_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_p(v_1) & \alpha_p(v_2) & \dots & \alpha_p(v_p) \end{pmatrix}$$

Hinweis: Erinnern Sie sich zunächst an die aus der Linearen Algebra bekannten Eigenschaften der Abbildung $\det : \mathbb{R}^{p \times p} \to \mathbb{R}$.

Im Folgenden nennen wir eine *Differentialform vom Grad p* kurz *p-Form*.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.**

(a) Berechnen Sie die äußere Ableitung der folgenden 1-Formen auf $\mathbb{R}^3$:

(i) $x^2\,dx + xy^2\,dz$

(ii) $(x + \cos(y))\,dy + 3\,dz$

(b) Berechnen Sie die äußere Ableitung der folgenden 2-Formen auf $\mathbb{R}^3$:

(i) $x^2\,dx\,dy + e^z\,dy\,dz$

(ii) $(x + \sin(z))\,dx\,dy + y\,dx\,dz + xyz\,dy\,dz$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei ω_1 eine p-Form und ω_2 eine q-Form auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sind ω_1 und ω_2 geschlossen, so auch $\omega_1 \wedge \omega_2$.

(b) Ist ω_1 geschlossen und ω_2 exakt, so ist $\omega_1 \wedge \omega_2$ exakt.

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Wir definieren auf U die $\mathbb{R}^3$-wertigen Differentialformen

$$d\vec{s} := \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad d\vec{A} := \begin{pmatrix} dx_2\, dx_3 \\ dx_3\, dx_1 \\ dx_1\, dx_2 \end{pmatrix}$$

und nennen $d\vec{s}$ das *Linienelement* und $d\vec{A}$ das *Flächenelement*. Jedem Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}^3$ wird dann durch $\langle F, d\vec{s}\rangle$ bzw. $\langle F, d\vec{A}\rangle$ in naheliegender Weise eine 1- bzw. 2-Form zugeordnet. Ferner nennen wir die 3-Form $dV := dx_1\, dx_2\, dx_3$ das *Volumenelement*. Zeigen Sie:

(a) Ist $f : U \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar, so gilt

$$df = \langle \operatorname{grad} f, d\vec{s}\rangle.$$

(b) Ist $F : U \to \mathbb{R}$ ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld, so gilt

$$d\langle F, d\vec{s}\rangle = \langle \operatorname{rot}(F), d\vec{A}\rangle \qquad \text{und} \qquad d\langle F, d\vec{A}\rangle = \operatorname{div}(F) dV.$$

(c) Folgern Sie aus $d^2 = 0$ die bekannten Identitäten

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0 \qquad \text{und} \qquad \operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$$

für zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen $f : U \to \mathbb{R}$ und zweimal stetig partiell differenzierbare Vektorfelder $F : U \to \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 5 (10 Punkte)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Für $p = 0, 1, 2, 3$ bezeichnen wir mit $\Omega^p(U)$ den Vektorraum aller beliebig oft stetig partiell differenzierbaren p-Formen auf U. Ferner sei $\mathcal{V}(U)$ der Vektorraum aller beliebig oft stetig partiell differenzierbaren Vektorfelder auf U. Zeigen Sie, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^0(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^1(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^2(U) \arrow[r, "d"] & \Omega^3(U) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^\infty(U) \arrow[r, "\operatorname{grad}"] \arrow[u, "\mathrm{id}"'] & \mathcal{V}(U) \arrow[r, "\operatorname{rot}"] \arrow[u, "{\langle \cdot, d\vec{s}\rangle}"'] & \mathcal{V}(U) \arrow[r, "\operatorname{div}"] \arrow[u, "{\langle \cdot, d\vec{A}\rangle}"'] & C^\infty(U) \arrow[r] \arrow[u, "\cdot dV"'] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutiert und die vertikalen Abbildungen jeweils bijektiv sind. Wie übersetzen sich die Aussagen des Lemmas von Poincaré für sternförmiges U von der ersten auf die zweite Zeile des Diagramms?