**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Roland Speicher
M.Sc. Tobias Mai

**Übungen zur Vorlesung Analysis III**
Wintersemester 2011/2012

**Blatt 13**
**Abgabe:** Donnerstag, 2.2.2012, 8:30 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

---

*Dieses Blatt enthält 6 Aufgaben, von denen Sie aber nur 5 bearbeiten müssen!*

**Aufgabe 1** (10 Punkte)**.** Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $\gamma : [a,b] \to U$ eine stetig differenzierbare Kurve. Zeigen Sie:

(a) Ist $\omega$ eine stetige Differentialform vom Grad 1 auf $U$, so ist die bezüglich $\gamma$ zurückgeholte Differentialform $\gamma^*\omega$ gegeben durch

$$(\gamma^*\omega)(t) = \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt \qquad \text{für alle } t \in (a,b),$$

wobei wir $\langle \alpha, x\rangle := \alpha(x)$ für Linearformen $\alpha \in (\mathbb{R}^n)^*$ und Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ setzen. Folgern Sie damit

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt.$$

(b) Ist $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Insbesondere hängt $\int_\gamma df$ nicht von der Kurve $\gamma$ ab, die die Punkte $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ verbindet.

**Aufgabe 2** (10 Punkte)**.** Auf $U := \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ betrachten wir die durch

$$\omega(x,y) := \frac{x}{x^2+y^2}\, dy - \frac{y}{x^2+y^2}\, dx, \qquad (x,y) \in U$$

definierte Differentialform $\omega$ vom Grad 1.

(a) Zeigen Sie, dass $\omega$ geschlossen ist.

(b) Sei $r > 0$ gegeben. Berechnen Sie $\int_{\gamma_r} \omega$ für

$$\gamma_r : [0, 2\pi] \to U,\ t \mapsto (r\cos(t), r\sin(t)).$$

Kann $\omega$ exakt sein?

***bitte wenden***

**Aufgabe 3** (10 Punkte)**.** In der Situation von Aufgabe 2 betrachten wir

$$V := \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,0)|\ x \in (-\infty, 0]\} \subset U.$$

Sei weiter $\gamma : [a,b] \to V$ eine beliebige Kurve in $V$ mit $\gamma(a) = (0,-1)$ und $\gamma(b) = (0,1)$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_\gamma \omega.$$

**Aufgabe 4** (10 Punkte)**.** Sei $\varphi : U \to V$ eine stetig partiell differenzierbare Abbildung zwischen zwei offenen Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Ist $\omega$ eine stetige Differentialform vom Grad $n$ auf $V$, so ist die bezüglich $\varphi$ zurückgeholte Differentialform $\varphi^*\omega$ gegeben durch

$$(\varphi^*\omega)(x) = \det(\varphi'(x))\omega(\varphi(x)) \qquad \text{für alle } x \in U,$$

wobei wir mit $\varphi'(x)$ die Jacobimatrix von $\varphi$ an der Stelle $x \in U$ bezeichnen.

**Aufgabe 5** (10 Punkte)**.** Berechnen Sie das Integral

$$\int_S x\,dy\,dz + y\,dx\,dy,$$

wobei $S$ die orientierte Fläche mit der folgenden Parametrisierung ist

$$D := [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^3,\ (u,v) \mapsto (u+v, u^2 - v^2, uv).$$

**Aufgabe 6** (10 Punkte)**.** Sei $S$ die orientierte Fläche

$$S := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0\}$$

und sei $\omega$ die durch

$$\omega(x,y,z) := -y\,dx + x\,dy + xy\,dz$$

definierte 1-Form auf $\mathbb{R}^3$. Verifizieren Sie für $\omega$ die Aussage

$$\int_S d\omega = \int_{\partial S} \omega$$

des Satzes von Stokes, indem Sie beide Seiten der Gleichung getrennt berechnen.