

---

## **Analysis III**

gehört bei Prof. Dr. Speicher im Winter 2016/17

---

Diese Mitschrift wurde von Friedrich Günther erstellt. Trotz Korrekturlesen durch Verfasser und Dozent kann keine Garantie für die Richtigkeit gegeben werden. Für Hinweise auf Fehler ist der Schreiber sehr dankbar:

[s9fhguen@stud.uni-saarland.de](mailto:s9fhguen@stud.uni-saarland.de).

# Inhaltsverzeichnis

<b>I. Integrationstheorie</b>	<b>3</b>
1. Abstrakte Integration aus gegebenem Maß . . . . .	4
2. Konstruktion von Maßen . . . . .	17
3. Der Satz über monotone Klassen . . . . .	22
4. Die Vektorräume $\mathcal{C}_c(X)$ , $\mathcal{C}_0(X)$ . . . . .	24
5. Produktmaße und der Satz von Fubini . . . . .	28
6. Bildmaße und Transformationsformel . . . . .	34
7. $L^p$ -Räume . . . . .	40
<b>II. Vektoranalysis</b>	<b>46</b>
8. Vektoranalysis: Die klassischen Sätze von Gauß und Stokes . . . . .	46
9. Differentialformen vom Grad 1 und Vektorfelder . . . . .	50
10. Differentialformen höherer Ordnung . . . . .	51
11. Äußere Ableitung von Differentialformen . . . . .	56
12. Stammfunktionen von Differentialformen . . . . .	58
13. Transformation von Differentialformen . . . . .	61
14. Flächeninhalt von parametrisierten Flächen . . . . .	64
15. Integration von Differentialformen . . . . .	66
16. Berandete Mannigfaltigkeiten und Zerlegung der Eins . . . . .	71
17. Orientierung von Mannigfaltigkeiten und ihren Rändern . . . . .	74
18. Der allgemeine Satz von Stokes . . . . .	75
19. Und zu guter Letzt: de Rham Kohomologie . . . . .	78

# I. Integrationstheorie

Das Riemann-Integral (oder das Integral von Regelfunktionen) ist eine gute Theorie für stetige Funktionen und verträgt sich gut mit der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen, passt aber nicht zur punktweisen Konvergenz. Zur Behandlung von allgemeineren Funktionen wird also ein allgemeinerer Integralbegriff als das Riemann-Integral gebraucht. Eine mögliche Verallgemeinerung ist das Daniell-Integral, wir werden uns vornehmlich mit dem Lebesgue-Integral beschäftigen. Beide Zugänge zu einem allgemeineren Integral liefern im Endeffekt äquivalente Theorien.

Sei zum Beispiel  $X = [0, 1]$  und  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ . Dann bezeichnen wir

$$\int_0^1 f(t) dt = \int f = \int f d\mu.$$

Abstrakt ist  $f \mapsto \int f$  ein positives lineare Funktional von  $\mathcal{C}(X)$  nach  $\mathbb{C}$ . Die direkte Ausdehnung nach Daniell erarbeitet die Integration einer möglichst großen Klasse von Funktionen  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ . Der Zugang von Lebesgue arbeitet mit dem Begriff eines sogenannten Maßes  $\mu$  auf  $X$ .

**Definition:** Sei  $X$  eine Menge,  $A \subset X$  eine Teilmenge. Dann definieren wir durch

$$1_A := \chi_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$$
$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

die charakteristische Funktion der Menge  $A$ .

Für solche charakteristischen Funktionen von  $A = [a, b]$  ist das Integral

$$\int 1_A(x) dx = \int_a^b dx = b - a$$

ein „Maß“ für die Größe von  $A$ .

**Bemerkung:** Das wesentliche Ziel der Theorie ist die Definition des Ausdrucks  $\int f d\mu$  für eine hinreichend große Klasse von Funktionen, so dass unter möglichst allgemeinen Bedingungen gilt:

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \tag{I.1}$$

für punktweise Konvergenz. Obige Einschränkungen („hinreichend große Klasse“, „möglichst allgemein“) sind notwendig, man kann nicht alle Funktionen integrieren und Gl. (I.1) gilt nicht für alle integrierbaren Funktionen.

# 1. Abstrakte Integration aus gegebenem Maß

Ein „Maß“ soll die Größe von Mengen messen, so dass es sich sinnvoll verhält bezüglich den kanonischen Operationen und Approximationen. Zum Beispiel für  $\mathbb{R} \supset I = [a, b]$  ist  $\lambda(I) = b - a$  die Länge des Intervalls, aber wir brauchen  $\lambda$  auch für Mengen, die aus Intervallen durch kanonische Operationen konstruiert werden können.

**Bemerkung:** Typischerweise kann man Maße nicht auf allen Mengen definieren. Der Definitionsbereich von Maßen heißt  $\sigma$ -Algebra.

**Definition 1.1:** (1) Sei  $X$  eine Menge. Eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$  ist ein Teilmenge  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(X) := \{A \mid A \subset X\}$  mit

- (i)  $X \in \mathfrak{A}$ ,
- (ii)  $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{A}$ ,
- (iii)  $A_n \in \mathfrak{A} \ (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$ .

**Bemerkung:** Mit **Definition 1.1** (i), (ii) folgt auch immer, dass  $\emptyset \in \mathfrak{A}$ .

(2) Ein (positives) Maß auf einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}$  ist eine Funktion  $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty]$  mit den Eigenschaften:

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
- (ii)  $\mu$  ist  $\sigma$ -additiv: für paarweise disjunkte  $A_n \in \mathfrak{A} \ (n \in \mathbb{N})$  gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(3) Ein messbarer Raum ist ein Paar  $(X, \mathfrak{A})$  bestehend aus einer Menge  $X$  und einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}$  auf  $X$ . Elemente von  $\mathfrak{A}$  heißen messbare Mengen.

(4) Ein Maßraum  $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  hat zusätzlich ein Maß  $\mu$  auf  $\mathfrak{A}$ .

**Bemerkung 1.2:** (0) Englische Bezeichnungen für die gerade definierten Begriffe:

- (i)  $\mathfrak{A}$ :  $\sigma$ -algebra,  $\sigma$ -field,
  - (ii)  $\mu$ : measure,
  - (iii)  $(X, \mathfrak{A})$ : measurable space,
  - (iv)  $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ : measure space.
- (1) Wesentlich ist, dass in der Definition von  $\sigma$ -Algebra und dem Maß abzählbare Vereinigungen erlaubt sind. „ $\sigma$ “ steht für „abzählbar“.
- (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \in [0, \infty]$  ist immer definiert, da alle Terme  $\geq 0$  sind.
- (3) Es ist sinnvoll auch  $\mu(A) = \infty$  für gewisse  $A$  zuzulassen, z. B. die Länge des Intervalls  $[a, \infty)$  ist unendlich.

- (4) Betrachte  $X = \mathbb{R}$ . Die trivialen Beispiele für  $\sigma$ -Algebren sind  $\mathfrak{A} = \{\emptyset, X\}$  und  $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(X)$ .
- (5) Sei  $\mathcal{F}$  eine Familie von Teilmengen von  $X$ . Dann definieren wir

$$\sigma(\mathcal{F}) := \bigcap_{\substack{\mathfrak{A} \text{ } \sigma\text{-Algebra} \\ \mathcal{F} \subset \mathfrak{A}}} \mathfrak{A}$$

und nennen  $\sigma(\mathcal{F})$  die von  $\mathcal{F}$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra. Insbesondere ist  $\sigma(\mathcal{F})$  die kleinste  $\sigma$ -Algebra, die  $\mathcal{F}$  enthält. Ein für uns interessanter Fall ist zum Beispiel  $\mathcal{F} = \{[a, b] \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ . Wir setzen  $\mathfrak{B} := \sigma(\mathcal{F})$  für die kleinste  $\sigma$ -Algebra, die alle Intervalle enthält.  $\mathfrak{B}$  heißt die Borel- $\sigma$ -Algebra.

- (6) Nicht-triviale  $\sigma$ -Algebren sind normalerweise recht abstrakte Objekte, zum Beispiel gibt es keine explizite Beschreibung einer allgemeinen Borelmenge  $A \in \mathfrak{B}$ .
- (7) Im Augenblick wissen wir noch nicht, wie wir nicht-triviale Maße konstruieren können; z. B. ist es nicht klar, wie wir  $\lambda$  (als Funktion, die reellen Intervallen ihre Länge zuordnet) zu beliebigen Borelmengen fortsetzen können? Im Augenblick nehmen wir ein Maß als gegeben an. Im nächsten Kapitel kommen wir auf das Problem der Konstruktion eines Maßes zurück.
- (8) Die  $\sigma$ -Additivität eines Maßes entspricht einer Stetigkeitseigenschaft.

**Notation 1.3:** Seien  $A_n \subset X$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) und  $A \subset X$ . Dann definieren wir

- (1)  $A_n \nearrow A \Leftrightarrow A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots, A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ,
- (2)  $A_n \searrow A \Leftrightarrow A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots, A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ .

**Satz 1.4:** Sei  $\mu$  ein Maß auf einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}$  und betrachte  $A_n \in \mathfrak{A}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $A \in \mathfrak{A}$ . Dann gilt:

- (1)  $A_n \nearrow A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ ,
- (2)  $\mu(A_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$  and  $A_n \searrow A \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ .

**Beweis:** Übungsblatt 2. ■

**Definition 1.5:** Seien  $(X, \mathfrak{A}), (Y, \mathfrak{M})$  messbare Räume. Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  heißt *messbar*, falls  $f^{-1}(M) \in \mathfrak{A}$  für alle  $M \in \mathfrak{M}$  gilt.

**Satz 1.6:** Sei  $\mathfrak{M} = \sigma(\mathcal{F})$  für  $\mathcal{F} \subset \mathfrak{P}(Y)$ . Dann gilt:  $f : X \rightarrow Y$  ist genau dann messbar, falls  $f^{-1}(F) \in \mathfrak{A} \forall F \in \mathcal{F}$ .

**Beweis:** „ $\Rightarrow$ “ : Klar.

„ $\Leftarrow$ “ : Setze  $\mathfrak{N} := \{N \subset Y \mid f^{-1}(N) \in \mathfrak{A}\}$ . Dann gelten  $\mathcal{F} \subset \mathfrak{N}$ , außerdem ist  $\mathfrak{N}$  eine  $\sigma$ -Algebra, was  $\mathfrak{N} \supset \sigma(\mathcal{F}) = \mathfrak{M}$  nach sich zieht, d. h.  $f^{-1}(M) \in \mathfrak{A} \forall M \in \mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ , also ist  $f$  messbar.

## I. Integrationstheorie

Um zu sehen, dass  $\mathfrak{N}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist, beachten wir, dass folgendes gilt:

- (i)  $X = f^{-1}(Y) \in \mathfrak{A}$ , also gilt  $Y \in \mathfrak{N}$ ,
- (ii) Sei  $N \in \mathfrak{N}$ , d. h.  $f^{-1}(N) \in \mathfrak{A}$ . Es gilt  $f^{-1}(N^c) = (f^{-1}(N))^c \in \mathfrak{A}$ , weil  $\mathfrak{A}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist. Darum gilt  $N^c \in \mathfrak{N}$ ,
- (iii) Sei  $N_n \in \mathfrak{N}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Es gilt  $f^{-1}(N_n) \in \mathfrak{A} \forall n$ . Wegen den Eigenschaften des Urbilds gilt

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(N_n) \in \mathfrak{A},$$

also gilt  $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \in \mathfrak{N}$ .

Damit ist  $\mathfrak{N}$  eine  $\sigma$ -Algebra und die Behauptung folgt. ■

Oft (insbesondere für  $Y = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ ) sind die betrachteten  $\sigma$ -Algebren durch eine Topologie gegeben.

**Definition 1.7:** Sei  $X$  eine Menge.

- (1) Eine *Topologie*  $\tau$  auf  $X$  ist eine Teilmenge  $\tau \subset \mathfrak{P}(X)$  mit
  - (i)  $\emptyset, X \in \tau$ ,
  - (ii)  $U_1, \dots, U_n \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$ ,
  - (iii)  $U_i \in \tau$  ( $i \in I$ )  $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$  für beliebige Indexmengen  $I$ .

Die Mengen in  $\tau$  heißen offene Mengen.

- (2) Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen zwei topologischen Räumen  $(X, \tau_X)$ ,  $(Y, \tau_Y)$  heißt *stetig*, falls  $f^{-1}(U) \in \tau_X \forall U \in \tau_Y$ .
- (3) Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum. Die von  $\tau$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra  $\sigma(\tau)$  heißt die  $\sigma$ -Algebra der *Borelmengen* in  $X$ .

**Konvention 1.8:** Im Folgenden betrachten wir  $Y = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$  immer als messbaren Raum mit der Borel- $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{B} = \sigma(\tau)$  bezüglich der kanonischen Topologie  $\tau$  auf  $Y$ .

**Korollar 1.9:** Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum. Dann ist jede stetige Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  messbar.

**Beweis:**  $\mathfrak{B}$  ist die  $\sigma$ -Algebra der offenen Mengen auf  $\mathbb{R}$ . Es bleibt gemäß [Satz 1.6](#) zu zeigen, dass  $f^{-1}(U) \in \sigma(\tau) \forall U \in \tau$ . Da  $f$  stetig und  $U$  offen ist gilt  $f^{-1}(U) \in \tau \subset \sigma(\tau)$ . ■

**Satz 1.10:** Jede offene Menge in  $\mathbb{R}$  ist abzählbare Vereinigung von offenen Intervallen und somit ist

$$\mathfrak{B} := \sigma(\tau) = \sigma(\{(a, b) \mid a < b\}) = \sigma(\{(\alpha, \infty) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{[\alpha, \infty) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}).$$

**Beweis:** Sei  $U \subset \mathbb{R}$  offen, wähle um jeden rationalen Punkt  $x_i \in U$  ein maximales offenes Intervall  $U_i$  mit  $x_i \in U_i \subset U$ . Dann ist schon  $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ , denn für  $x \in U$  gibt es  $\varepsilon > 0$ , so dass  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset U$ . Nun existiert ein  $x_i \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$  mit  $|x - x_i| < \varepsilon/3$ , also gilt  $x \in U_i$ .

Wegen  $(a, b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (a, b + \frac{1}{n})$ ,  $(a, b) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a, b - \frac{1}{n}]$ ,  $(a, b] = (-\infty, b] \cap (a, \infty)$  und  $(a, \infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (a, n]$  sind die in Satz [Satz 1.10](#) angegebenen Beschreibungen der Borel- $\sigma$ -Algebra äquivalent. ■

**Korollar 1.11:** Sei  $(X, \mathfrak{A})$  ein messbarer Raum und  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt:  $f$  ist messbar genau dann, wenn  $f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \mid f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{A} \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ , oder genau dann, wenn  $f^{-1}([\alpha, \infty)) = \{x \mid f(x) \geq \alpha\} \in \mathfrak{A} \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ , oder genau dann, wenn  $\{x \mid f(x) < \alpha\} \in \mathfrak{A} \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

**Beweis:** Klar nach [Satz 1.6](#) und [Satz 1.10](#). ■

**Satz 1.12:** Seien  $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  messbar. Dann sind auch  $f + g, f \cdot g : X \rightarrow \mathbb{R}$  messbar.

**Beweis:** Die Messbarkeitsbedingung  $f(x) + g(x) < \alpha$  führt auf  $f(x) < \alpha - g(x)$ , d. h.  $\exists r \in \mathbb{Q} : f(x) < r < \alpha - g(x)$ . Somit ist

$$\{x \mid f(x) + g(x) < \alpha\} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \underbrace{\{x \mid f(x) < r\}}_{\in \mathfrak{A}} \cap \underbrace{\{x \mid g(x) < \alpha - r\}}_{\in \mathfrak{A}},$$

also gilt  $\{x \mid f(x) + g(x) < \alpha\} \in \mathfrak{A} \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ , damit ist  $f + g$  messbar. Der Beweis für das Produkt  $f \cdot g$  funktioniert analog. ■

**Konvention 1.13:** Für reellwertige Funktionen wollen wir auch  $\pm\infty$  als Funktionswerte zulassen, d. h. wir betrachten  $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  und versehen  $\overline{\mathbb{R}}$  mit einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \sigma(\{[\alpha, \infty] \mid \alpha \in \mathbb{R}\}) = \sigma(\{(\alpha, \infty] \mid \alpha \in \mathbb{R}\})$ . Somit ist  $f : (X, \mathfrak{A}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  messbar genau dann, wenn  $\{x \mid f(x) \geq \alpha\} \in \mathfrak{A} \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

Die topologischen Begriffe (Grenzwerte, sup, inf) sind auf  $\overline{\mathbb{R}}$  in offensichtlicher Weise definiert mit der Konvention  $-\infty \leq x \leq \infty \ \forall x \in \overline{\mathbb{R}}$ .

**Satz 1.14:** Seien  $f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  für  $n \in \mathbb{N}$  eine Folge von messbaren Funktionen. Dann sind auch  $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n, \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n, \limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  alle messbar. Insbesondere gilt: für eine punktweise konvergente Folge von messbaren Funktionen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist auch der Grenzwert  $f = \lim_{n \in \mathbb{N}} f_n$  messbar.

**Beweis:** Zuerst wollen wir den Nachweis bringen, dass  $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$  messbar ist. Sei dazu  $\alpha \in \mathbb{R}$ , dann ist

$$\{x \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x \mid f_n(x) > \alpha\}}_{\in \mathfrak{A}},$$

also ist  $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$  messbar. Der Nachweis für  $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$  funktioniert analog. Weiter gilt  $\limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{k \geq n} f_k$ , damit ist auch  $\limsup_{n \in \mathbb{N}} f_n$  messbar.  $\liminf_{n \in \mathbb{N}} f_n$  funktioniert genauso. ■

**Notation 1.15:** Sei  $A \subset X$  beliebige Menge. Die *charakteristische Funktion*  $1_A$  (oder auch  $\chi_A$ ) ist definiert durch

$$1_A : X \longrightarrow \{0, 1\}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Die charakteristische Funktion  $1_A$  einer Menge  $A$  ist genau dann messbar, wenn  $A$  messbar ist.

**Definition 1.16:** Eine Funktion  $s : X \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *einfach* (oder auch *Elementarfunktion*), falls sie messbar ist und ihr Wertebereich nur aus endlich vielen Punkten besteht, d. h.

$$s = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$$

für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  und paarweise disjunkte messbare  $A_1, \dots, A_n \subset X$ .

Summen, Differenzen und Produkte von einfachen Funktionen sind jeweils wieder einfache Funktionen.

**Satz 1.17:** Sei  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  eine messbare Funktion. Dann gibt es einfache Funktionen  $s_n : X \rightarrow \mathbb{R}$  mit

- (a)  $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq f$ ,
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$ .

**Beweis:** Setze

$$s_n(x) := \begin{cases} n & f(x) \geq n \\ k \frac{n}{2^n} & k \frac{n}{2^n} \leq f(x) < (k+1) \frac{n}{2^n} \text{ für } 0 \leq k \leq 2^n - 1 \end{cases} ,$$

d. h.  $s_n$  hat die Darstellung

$$s_n = n \cdot 1_{f^{-1}([n, \infty])} + \sum_{k=0}^{2^n-1} \left( k \frac{n}{2^n} \right) 1_{f^{-1}([k \frac{n}{2^n}, (k+1) \frac{n}{2^n})} .$$

Die so konstruierten  $s_n$  erfüllen das Gewünschte. ■

**Bemerkung 1.18:** (1) Die Strategie zur Definition des Integrals:

- (i) Für charakteristische Funktionen  $1_A$  erklären wir das Integral von  $1_A$  durch  $\int 1_A d\mu = \mu(A)$ .
- (ii) Für einfache Funktionen erklären wir das Integral durch

$$\int \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int 1_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i).$$



(iii) Für messbare Funktionen wollen wir einen Integralbegriff definieren, der  $\int \lim_{n \rightarrow \infty} s_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n d\mu$  leistet.

Im Schritt von charakteristischen Funktionen zu einfachen Funktionen müssen wir uns überlegen, dass für

$$\sum_{j=1}^n \beta_j 1_{B_j} = s = \sum_{i=1}^m \alpha_i 1_{A_i}$$

gilt

$$\sum_{j=1}^n \beta_j \mu(B_j) = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mu(A_i).$$

Das ist einfach zu sehen. Im Schritt von einfachen Funktionen zu messbaren Funktionen müssen wir prüfen, dass für  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = f = \lim_{n \rightarrow \infty} t_n$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int t_n d\mu.$$

Das ist nicht offensichtlich, daher definieren wir das Integral etwas anders und betrachten Konvergenzeigenschaften später.

- (2) Um Problemen mit  $\infty - \infty$  aus dem Weg zu gehen, betrachten wir zunächst für  $f \geq 0$ , später betrachten wir dann den allgemeinen Fall.
- (3) Vergleiche Vorgehensweise zur Behandlung von summierbaren Reihen in der Analysis I.

Im Folgenden sei  $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum.

**Definition 1.19 (Lebesgue-Integral):** (1) Sei  $s : X \rightarrow [0, \infty)$  eine einfache Funktion, d. h.  $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$  für  $A_i \in \mathfrak{A}, 0 \leq \alpha_i < \infty \forall i$  und  $E \in \mathfrak{A}$ , dann definieren wir

$$\int_E s d\mu := \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_E 1_{A_i} d\mu := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E) \in [0, \infty],$$

wobei wir die Konvention  $0 \cdot \infty = 0$  verwenden.

- (2) Für eine messbare Funktion  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  und  $E \in \mathfrak{A}$  definieren wir das *Lebesgue-Integral* von  $f$  über  $E$  durch

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \int_E f d\mu := \sup_{\substack{s \text{ einfach} \\ 0 \leq s \leq f}} \int_E s d\mu \in [0, \infty].$$

**Bemerkung 1.20:** (1) Für einfache  $s : X \rightarrow [0, \infty)$  stimmen [Definition 1.19 \(1\)](#) und [Definition 1.19 \(2\)](#) überein. Falls  $s$  nämlich einfach ist, ist

$$\int_E s d\mu = \sup_{\substack{\tilde{s} \text{ einfach} \\ 0 \leq \tilde{s} \leq s}} \int_E \tilde{s} d\mu.$$

## I. Integrationstheorie

Dies sieht man folgendermaßen: Da  $s$  als  $\tilde{s}$  gewählt werden kann, gilt

$$\int_E s \, d\mu \leq \sup_{\substack{\tilde{s} \text{ einfach} \\ 0 \leq \tilde{s} \leq s}} \int_E \tilde{s} \, d\mu.$$

Für  $\tilde{s} \leq s$  ist  $\int_E \tilde{s} \, d\mu \leq \int_E s \, d\mu$ : da  $\tilde{s}, s$  einfach sind und  $\tilde{s} \leq s$  können wir schreiben

$$\tilde{s} = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i} \quad , \quad s = \sum_{i=1}^n \beta_i 1_{A_i}$$

für  $\mathfrak{A} \ni A_i$  paarweise disjunkt und  $0 \leq \alpha_i \leq \beta_i < \infty \, \forall i$ ; damit gilt

$$\int_E \tilde{s} \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E) \leq \sum_{i=1}^n \beta_i \mu(A_i \cap E) = \int_E s \, d\mu.$$

(2) Auch für  $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$  für  $\mathfrak{A} \ni A_i$  paarweise disjunkt,  $0 \leq \alpha_i \leq \infty$  gilt

$$\int_E s \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E)$$

mit  $0 \cdot \infty = 0$ .

**Satz 1.21:** Seien  $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$  messbar und  $A, B, E \in \mathfrak{A}$ . Dann gilt:

- (1)  $f \leq g \Rightarrow \int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$ ,
- (2)  $A \subset B \Rightarrow \int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu$ ,
- (3) Für alle Konstanten  $0 \leq c \leq \infty$  gilt  $\int_E c \cdot f \, d\mu = c \int_E f \, d\mu$ ,
- (4)  $f(x) = 0 \, \forall x \in E \Rightarrow \int_E f \, d\mu = 0$  (auch falls  $\mu(E) = \infty$ ),
- (5)  $\mu(E) = 0 \Rightarrow \int_E f \, d\mu = 0$  (auch falls  $f(x) = \infty \, \forall x \in E$ ),
- (6)  $\int_E f \, d\mu = \int_X 1_E f \, d\mu$ .

**Beweis:** Alle Aussagen sind direkte Folgerungen aus der Definition. Exemplarisch wollen wir einige Aussagen zeigen, die restlichen seien zur Übung überlassen.

- (1) Jedes einfache  $s$  mit  $0 \leq s \leq f$  erfüllt auch  $0 \leq s \leq g$ .
- (2) Zunächst sei  $f = s$  einfach, also  $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$ . Für das Integral von  $s$  gilt

$$\int_A s \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A \cap A_i) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(B \cap A_i) = \int_B s \, d\mu$$

wegen  $A \cap A_i \subset B \cap A_i$  und der Monotonieeigenschaft des Maßes. Sei  $f$  nun messbar. Für das Integral gilt dann

$$\int_A f \, d\mu = \sup_{\substack{s \text{ einfach} \\ 0 \leq s \leq f}} \int_A s \, d\mu \leq \sup_{\substack{s \text{ einfach} \\ 0 \leq s \leq f}} \int_B s \, d\mu = \int_B f \, d\mu,$$

wegen der Abschätzung  $\int_A s \, d\mu \leq \int_B s \, d\mu$  für alle einfachen  $s$ .

- (4) Sei  $f \equiv 0$  auf  $E$ . Dann erfüllt jedes einfache  $s$  mit  $0 \leq s \leq f$  schon  $s \equiv 0$  auf  $E$ , d. h. für solches  $s$  gilt  $\int_E s \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E) = 0$ , da entweder  $A_i \cap E = \emptyset$ , oder  $A_i \cap E \neq \emptyset$ , aber deshalb schon  $\alpha_i = 0$  da  $s(x) = 0 \forall x \in E$ . Dann ist auch  $\int_E f \, d\mu = \sup 0 = 0$ . ■

**Bemerkung 1.22:** Die Linearität des Integrals, also

$$\int_E (f + g) \, d\mu = \int_E f \, d\mu + \int_E g \, d\mu$$

ist nach Definition zwar klar für einfache  $f, g : X \rightarrow [0, \infty)$ , allerdings nicht für beliebige messbare Funktionen  $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$ . Dies werden wir erst später zeigen können.

**Proposition 1.23:** Sei  $s : X \rightarrow [0, \infty)$  eine einfache Funktion. Setze für  $E \in \mathfrak{A}$ :  $\varphi(E) := \int_E s \, d\mu$ . Dann ist  $\varphi$  ein Maß auf  $\mathfrak{A}$ . Insbesondere gilt für Mengen  $E_n \in \mathfrak{A}$  für  $n \in \mathbb{N}$ :

$$E_n \nearrow E \Rightarrow \int_{E_n} s \, d\mu \rightarrow \int_E s \, d\mu.$$

**Beweis:** (1)  $\varphi : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty]$  ist erfüllt, da wir eine positive einfache Funktion  $s$  integrieren.

(2)  $\varphi(\emptyset) = 0$  wegen **Satz 1.21 (5)**.

(3) Für die  $\sigma$ -Additivität seien  $E_i \in \mathfrak{A}$  paarweise disjunkt. Setze  $E := \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$  und sei  $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{A_i}$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi(E) &= \int_E s \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (A_i \cap E_j)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i \cap E_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{E_j} s \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(E_j), \end{aligned}$$

also ist  $\varphi$  ein Maß. Damit ist der zweite Teil der Proposition klar aus der Stetigkeit des Maßes in **Satz 1.4**. ■

**Satz 1.24 (von der monotonen Konvergenz):** Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine monoton wachsende Folge von messbaren Funktionen auf  $X$  mit

$$(1) \quad 0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq \infty \quad \forall x \in X,$$

I. Integrationstheorie

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X.$$

Dann ist  $f$  messbar und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

**Beweis:** Die Grenzfunktion  $f$  ist messbar nach [Satz 1.14](#), nach [Satz 1.21](#) wissen wir

$$f_n \leq f_{n+1} \Rightarrow \int_X f_n d\mu \leq \int_X f_{n+1} d\mu,$$

also ist  $(\int_X f_n d\mu)_{n \in \mathbb{N}}$  eine wachsende Folge in  $[0, \infty]$ , und somit existiert also  $\alpha \in [0, \infty]$ , so dass  $\int_X f_n d\mu \rightarrow \alpha$ . Wir erhalten also

$$\begin{aligned} f_n \leq f_{n+1} &\Rightarrow \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu \quad \forall n \\ &\Rightarrow \alpha \leq \int_X f d\mu, \end{aligned}$$

somit gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu$ . Es bleibt zu zeigen, dass auch die Ungleichung  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \geq \int_X f d\mu$  gilt. Betrachte dazu ein einfaches  $s$  mit  $0 \leq s \leq f$ ; fixiere nun  $C \in (0, 1)$  und setze  $E_n := \{x \in X \mid f_n(x) \geq Cs(x)\}$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gelten:

- (1)  $E_n \in \mathfrak{A} \quad \forall n$ ,
- (2)  $E_1 \subset E_2 \subset \dots$  (da  $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ ),
- (3)  $E_n \nearrow X$ . Dies sieht man folgendermaßen:

Falls  $f(x) = 0$ , dann ist auch  $s(x) = 0$  und  $x \in E_n \quad \forall n$ .

Ist  $f(x) > 0$ , dann ist  $Cs(x) < f(x)$ . Es gibt nun ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $Cs(x) < f_n(x)$ , da  $f_n \rightarrow f$ ; es gibt also ein  $n \in \mathbb{N}$ , so dass  $x \in E_n$ .

Also:

$$\int_X f_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq \int_{E_n} Cs d\mu = C \int_{E_n} s d\mu.$$

Für den Grenzwert  $n \rightarrow \infty$  erhalten wir

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \rightarrow \alpha \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} C \int_{E_n} s d\mu = C \int_X s d\mu.$$

Insgesamt gilt also  $\alpha \geq C \int_X s d\mu$  für alle  $C < 1$ , also ist  $\alpha \geq \int_X s d\mu$  für alle einfachen  $s$  mit  $0 \leq s \leq f$ . Aber dann gilt

$$\alpha \geq \sup_{\substack{s \text{ einfach} \\ 0 \leq s \leq f}} \int_X s d\mu = \int_X f d\mu,$$

also insgesamt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \alpha = \int_X f d\mu$ . ■

**Korollar 1.25:** (1) Seien  $f, g : X \rightarrow [0, \infty]$  messbar. Dann gilt

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

(2) Seien  $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$  messbar für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gilt

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n d\mu.$$

(3) Sei  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  messbar, dann ist

$$E \longmapsto \int_E f d\mu$$

ein Maß auf  $\mathfrak{A}$ .

**Beweis:** (1) Seien  $f, g \geq 0$  messbar. In [Satz 1.14](#) haben wir gesehen, dass es einfache Funktionen  $s_n, t_n$  gibt, mit  $s_n \nearrow f, t_n \nearrow g$ .  $s_n + t_n$  ist wieder eine einfache Funktion und es gilt  $s_n + t_n \nearrow f + g$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_X (f + g) d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (s_n + t_n) d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X t_n d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu. \end{aligned}$$

(2) Ähnlich, deshalb als Übung.

(3) Folgerung aus [Korollar 1.25 \(2\)](#). ■

**Lemma 1.26 (von Fatou):** Seien  $f_n : X \rightarrow [0, \infty]$  für  $n \in \mathbb{N}$  messbar. Dann gilt

$$\int_X \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

**Beweis:** Übungsaufgabe. ■

**Notation 1.27:** Betrachte nun  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ . Wir zerlegen die Funktion gemäß

$$f = f_1 + \imath f_2 = (f_1^+ - f_1^-) + \imath(f_2^+ - f_2^-),$$

wobei  $f_1 := \operatorname{Re}(f), f_2 := \operatorname{Im}(f)$  und für  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  definieren wir

$$\begin{aligned} g^+ &:= \max(g, 0) \geq 0 \\ g^- &:= -\min(g, 0) \geq 0, \end{aligned}$$

also  $g = g^+ - g^-$ . Die Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  ist genau dann messbar, wenn alle Funktionen  $f_1^+, f_1^-, f_2^+, f_2^- : X \rightarrow [0, \infty)$  messbar sind.

**Definition 1.28:** (1) Eine messbare Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *Lebesgue-integrierbar*, falls

$$\int_X |f| d\mu < \infty.$$

Wir definieren dann das Integral als

$$\int f d\mu := \left( \int f_1^+ d\mu - \int f_1^- d\mu \right) + \imath \left( \int f_2^+ d\mu - \int f_2^- d\mu \right) \in \mathbb{C}.$$

I. Integrationstheorie

(2) Wir setzen

$$L^1(\mu) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist integrierbar}\}.$$

**Bemerkung 1.29:** (1) Wenn  $f$  messbar ist, dann ist auch  $|f|$  messbar.

(2) Es gilt  $0 \leq f_1^+ \leq |f|$ , d.h.  $0 \leq \int f_1^+ d\mu \leq \int |f| d\mu < \infty$ , falls  $f \in L^1(\mu)$ . Analog natürlich für die anderen Integrale. Damit ist  $\int f d\mu \in \mathbb{C}$  für  $f \in L^1(\mu)$ .

**Proposition 1.30:**  $L^1(\mu)$  ist ein komplexer Vektorraum, d.h. für  $f, g \in L^1(\mu)$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  gilt auch  $\alpha f + \beta g \in L^1(\mu)$ . Außerdem ist die Integration eine lineare Abbildung:

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \beta \int g d\mu.$$

**Beweis:** Die Funktion  $\alpha f + \beta g$  ist messbar nach [Satz 1.12](#), wenn  $f$  und  $g$  messbar sind. Wir erhalten die Ungleichung,

$$\int |\alpha f + \beta g| d\mu \leq \int (|\alpha||f| + |\beta||g|) d\mu = |\alpha| \int |f| d\mu + |\beta| \int |g| d\mu < \infty$$

also die Integrierbarkeit von  $\alpha f + \beta g$ . Die Linearität ist klar. ■

**Satz 1.31:** Für  $f \in L^1(\mu)$  gilt

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu.$$

**Beweis:** Sei  $\alpha \in \mathbb{C}$  mit  $|\alpha| = 1$ , so dass

$$\alpha \int f d\mu = \left| \int f d\mu \right|.$$

Wegen  $|\int f d\mu| \in \mathbb{R}$  erhalten wir dann

$$\alpha \int f d\mu = \int \alpha f d\mu = \operatorname{Re} \left( \int \alpha f d\mu \right) = \int \operatorname{Re}(\alpha f) d\mu \leq \int |f| d\mu. \quad \blacksquare$$

**Satz 1.32 (von der majorisierten Konvergenz):** Seien  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  messbare Funktionen,  $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ , so dass der punktweise Limes  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  für alle  $x \in X$  existiert. Falls es eine nicht-negative Funktion  $g \in L^1(\mu)$  gibt mit  $|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}, x \in X$ , dann sind  $f_n, f \in L^1(\mu)$  und es gelten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\mu = 0 \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

**Beweis:** Die Funktion  $f$  ist messbar nach [Satz 1.14](#). Es gilt  $|f_n(x)| \leq g(x) \forall n$ , also

$$\int_X |f_n(x)| d\mu \leq \int_X g(x) d\mu < \infty,$$

da  $g \in L^1(\mu)$ ; damit sind die  $f_n \in L^1(\mu)$ . Insbesondere gilt auch  $|f(x)| \leq g(x)$ , also  $f \in L^1(\mu)$ . Es gilt

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g,$$

also  $2g - |f_n - f| \geq 0$ . Mit dem [Lemma 1.26](#) erhalten wir die Abschätzung

$$\int_X \liminf_{n \rightarrow \infty} (2g - |f_n - f|) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X (2g - |f_n - f|) d\mu$$

also

$$\int_X 2g d\mu \leq \int_X 2g d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu$$

Da  $\int_X g d\mu < \infty$  erhalten wir daraus

$$0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu \leq 0,$$

also

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0,$$

d. h. insbesondere existiert der Grenzwert und es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$ . Somit

$$\left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| = \left| \int_X (f_n - f) d\mu \right| \leq \int_X |f_n - f| d\mu \rightarrow 0,$$

also  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_X f_n d\mu - \int_X f d\mu \right| = 0$ , also  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ . ■

**Bemerkung 1.33:** (1) Die Konvergenz  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f| d\mu = 0$  ist die angemessene in  $L^1(\mu)$ . Die Definition

$$\|f\|_1 := \int_X |f| d\mu$$

liefert fast eine Norm auf  $L^1(\mu)$ , welche diesen zu einem Banachraum macht. Mehr dazu später.

- (2) Damit  $\|f\|_1$  eine Norm auf  $L^1(\mu)$  liefert brauchen wir, dass  $\|f\|_1 = 0 \Rightarrow f = 0$  gilt, aber charakteristische Funktionen  $f = 1_A$  für  $A \in \mathfrak{A}$  mit  $\mu(A) = 0$  verletzen diese Bedingung. Daher werden wir in  $L^1(\mu)$  Funktionen identifizieren, falls sie sich nur auf Mengen  $A$  mit  $\mu(A) = 0$  unterscheiden:

$$f \sim g :\Leftrightarrow \mu(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Der Raum  $L^1(\mu)$  ist dann die Menge der Äquivalenzklassen von Funktionen bezüglich  $\sim$ .

**Definition 1.34:** Eine Eigenschaft  $E$  gilt *fast überall* (abgekürzt f. ü.), falls für die Menge  $M := \{x \mid \neg E(x)\}$  gilt  $\mu(M) = 0$ .

Insbesondere gilt

- $f = g$  fast überall, falls  $\mu(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$ ,
- $f_n \rightarrow f$  fast überall, falls  $\mu(\{x \mid f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}) = 0$ .

**Bemerkung 1.35:** (1) Im Englischen sagt man „almost everywhere“ für „fast überall“, dementsprechend ist die Abkürzung a. e. statt f. ü.

(2)  $f = g$  fast überall impliziert, dass  $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu \forall E \in \mathfrak{A}$ , denn nach Voraussetzung hat  $N := \{x \mid f(x) \neq g(x)\}$  das Maß 0, d. h.

$$\int_E f d\mu = \int_{E \setminus N} f d\mu + \int_{E \cap N} f d\mu = \int_{E \setminus N} g d\mu + \int_{E \cap N} g d\mu = \int_E g d\mu,$$

da

$$\int_{E \cap N} f d\mu = 0 = \int_{E \cap N} g d\mu.$$



## 2. Konstruktion von Maßen

**Definition 2.1:** (1) Eine *Algebra von Mengen* (oder auch *Mengenalgebra*) auf einer Menge  $X$  ist eine nicht-leere Familie  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ , so dass gelten:

- (i)  $A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{A}$ ,
- (ii)  $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{A}$ .

(2) Ein *Prämaß* auf einer Algebra  $\mathfrak{A}$  ist eine Funktion  $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty]$ , so dass gilt:

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
- (ii) Für  $A_1, A_2, \dots$  paarweise disjunkt,  $A_n \in \mathfrak{A} \ \forall n$  und  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$  gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

**Bemerkung 2.2:** (1) Ist  $\mathfrak{A}$  eine Algebra, so  $\exists A \in \mathfrak{A}$ , da  $\mathfrak{A}$  nicht-leer ist, also gilt  $\mathfrak{A} \ni X = A \cup A^c$ , ebenso  $\emptyset \in \mathfrak{A}$ .

(2) Algebren und Prämaße sind (im Gegensatz zu  $\sigma$ -Algebren und Maßen) recht einfach und explizit zu konstruieren.

**Beispiel 2.3:** Sei  $X = \mathbb{R}$ , dann ist

$$\mathfrak{A} := \{A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ ist Vereinigung von endlich vielen Intervallen}\}$$

eine Algebra auf  $X$  und

$$\mu : \mathfrak{A} \longrightarrow [0, \infty] \quad , \quad \bigcup_{k=1}^n I_k = A \longmapsto \mu(A) = \sum_{k=1}^n \text{Länge}(I_k)$$

ist ein Prämaß auf  $\mathfrak{A}$ . Der Beweis ist eine Übungsaufgabe auf dem vierten Übungsblatt.

**Definition 2.4:** Sei  $\mu$  ein Prämaß auf einer Algebra  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ . Wir definieren dann für alle  $E \subset X$

$$\mu^*(E) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) : A_n \in \mathfrak{A} \ \forall n, E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}.$$

$\mu^*$  heißt das von  $\mu$  induzierte *äußere Maß*.

**Proposition 2.5:**  $\mu^*$  hat die folgenden Eigenschaften:

- (1)  $\mu^*(\emptyset) = 0$ ,
- (2)  $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ ,

## I. Integrationstheorie

$$(3) \mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n),$$

$$(4) \mu^*(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathfrak{A}.$$

Wir nennen die Eigenschaft (3) aus **Proposition 2.5** *Subadditivität*.

**Beweis:** Die Aussagen (1), (2) sind klar.

Für (3) sei  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ . Falls  $\mu^*(E_n) = \infty$  für irgendein  $n$  gilt, dann ist die Behauptung klar, wir können also annehmen, dass  $\mu^*(E_n) < \infty \quad \forall n$ . Sei  $\varepsilon > 0$ , für alle  $n$  gibt es dann  $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \dots \in \mathfrak{A}$  mit  $E_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^{(n)}$  und  $\mu^*(E_n) > \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i^{(n)}) - \frac{\varepsilon}{2^n}$ . Wir erhalten  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_i A_i^{(n)}$ , also

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &\leq \sum_n \sum_i \mu(A_i^{(n)}) \\ &\leq \sum_n \mu^*(E_n) + \varepsilon, \end{aligned}$$

mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  erhalten wir  $\mu^*(E) \leq \sum_n \mu^*(E_n)$ .

**Proposition 2.5** (4) ist Übungsaufgabe. ■

**Definition 2.6:** Eine Menge  $E \subset X$  heißt *messbar bezüglich  $\mu^*$* , falls  $\forall A \subset X$  gilt:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

**Satz 2.7:** Sei

$$\mathfrak{M}_\mu := \{E \subset X \mid E \text{ ist messbar bezüglich } \mu^*\} \quad \text{und} \quad \bar{\mu} := \mu^*|_{\mathfrak{M}_\mu}.$$

Dann gelten:

- (1)  $\mathfrak{M}_\mu$  ist eine  $\sigma$ -Algebra,
- (2)  $\bar{\mu}$  ist ein Maß auf  $\mathfrak{M}_\mu$ ,
- (3)  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}_\mu$ .

**Beweis:** (1)  $\mathfrak{M}_\mu$  ist eine  $\sigma$ -Algebra:

(i)  $\emptyset \in \mathfrak{M}_\mu$  ist klar, da

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap \emptyset) + \mu^*(A \cap X) = 0 + \mu^*(A).$$

(ii)  $E \in \mathfrak{M}_\mu \Rightarrow E^c \in \mathfrak{M}_\mu$  ist klar.

(iii) Wir betrachten zunächst endliche Vereinigungen: seien  $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}_\mu$ , zu zeigen ist dann, dass  $E_1 \cup E_2 \in \mathfrak{M}_\mu$ . Es gilt

$$\begin{aligned} &\mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c) \\ &= \mu^*((A \cap E_2) \cup (A \cap E_1 \cap E_2^c)) + \mu^*(A \cap (E_1^c \cap E_2^c)) \\ &\leq \mu^*(A \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_1 \cap E_2^c) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c) \\ &= \mu^*(A \cap E_2) + \mu^*(A \cap E_2^c) \end{aligned}$$

$$= \mu^*(A).$$

Die Ungleichung in die andere Richtung gilt wegen der Subadditivität von  $\mu^*$ , damit also die Gleichheit und  $E_1 \cup E_2 \in \mathfrak{M}_\mu$ .

Seien nun  $F_1, F_2, \dots \in \mathfrak{M}_\mu$ , zu zeigen ist, dass  $E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \in \mathfrak{M}_\mu$ . Definiere  $E_1 := F_1$ , für  $i > 1$  setze  $E_i := F_i \setminus E_{i-1} = F_i \cap F_{i-1}^c$ . Die so konstruierten  $E_1, E_2, \dots$  sind disjunkt und es gilt  $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ . Setze  $G_n := \bigcup_{i=1}^n E_i$ . Dann gilt für  $A \subset X$ , da  $E_n \in \mathfrak{M}_\mu$

$$\begin{aligned} \mu^*(A \cap G_n) &= \mu^*((A \cap G_n) \cap E_n) + \mu^*((A \cap G_n) \cap E_n^c) \\ &= \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \cap G_{n-1}), \end{aligned}$$

also erhalten wir gemäß Induktion, dass  $\mu^*(A \cap G_n) = \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i)$ . Dann ist aber (da  $G_n \in \mathfrak{M}_\mu$  und  $E^c \subset G_n^c$ )

$$\begin{aligned} \mu^*(A) &= \mu^*(A \cap G_n) + \mu^*(A \cap G_n^c) \\ &\geq \mu^*(A \cap G_n) + \mu^*(A \cap E^c) \\ &\geq \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E^c). \end{aligned}$$

Für  $n \rightarrow \infty$  gilt dann

$$\mu^*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E^c) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c);$$

letztere Ungleichung folgt wegen der Subadditivität, da

$$A \cap E = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (A \cap E_i).$$

Somit gilt also

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Die andere Richtung der Ungleichung gilt wieder wegen der Subadditivität, damit gilt also die Gleichheit, damit ist  $E \in \mathfrak{M}_\mu$ .

(2)  $\mu^*$  ist ein Maß auf  $\mathfrak{M}_\mu$ :

- (i)  $\mu^*(\emptyset) = 0$  ist klar.
- (ii) Zunächst zeigen wir die endliche Additivität. Seien  $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}_\mu$  mit  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu^*(E_1 \cup E_2) &= \mu^*((E_1 \cup E_2) \cap E_2) + \mu^*((E_1 \cup E_2) \cap E_2^c) \\ &= \mu^*(E_2) + \mu^*(E_1). \end{aligned}$$

Betrachte für die  $\sigma$ -Additivität nun  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$  mit  $E_i \in \mathfrak{M}_\mu \forall i$ . Es gilt wegen der Monotonie des äußeren Maßes und der schon bewiesenen endlichen Additivität

$$\mu^*(E) \geq \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^n E_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu^*(E_i).$$

## I. Integrationstheorie

Für  $n \rightarrow \infty$  gilt also

$$\mu^*(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i).$$

Die andere Richtung gilt wegen der Subadditivität, also ist

$$\mu^*(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$$

und  $\mu^*$  ist ein Maß auf  $\mathfrak{M}_\mu$ .

(3) Es gilt  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}_\mu$ : Sei  $E \in \mathfrak{A}$  und  $A \subset X$ . Zu zeigen ist, dass

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

gilt. Wegen der Subadditivität ist klar, dass  $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ , es bleibt also zu zeigen, dass  $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ . Wir können annehmen, dass  $\mu^*(A) < \infty$ , andernfalls gilt die Ungleichung nämlich trivialerweise. Sei  $\varepsilon > 0$ . Es gibt  $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{A}$  mit  $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  und  $\mu^*(A) > \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) - \varepsilon$ . Da  $\mu$  auf  $\mathfrak{A}$  additiv ist und wegen  $A_n, E \in \mathfrak{A}$  haben wir

$$\mu(A) = \mu(A_n \cap E) + \mu(A_n \cap E^c).$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} \mu^*(A) + \varepsilon &> \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_n \cap E) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap E^c) \\ &\geq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap E\right) + \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap E^c\right) \\ &\geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \end{aligned}$$

Dieses Argument gilt für jedes  $\varepsilon > 0$ , also haben wir

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c).$$

Somit gilt auch die Gleichheit und damit ist  $E \in \mathfrak{M}_\mu \forall E \in \mathfrak{A}$ , also  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}_\mu$ . ■

Somit haben wir folgenden Satz bewiesen.

**Satz 2.8 (von Caratheodory):** Sei  $\mu$  ein Prämaß auf einer Algebra  $\mathfrak{A}$  und  $\mu^*$  das zugehörige äußere Maß, und sei  $\mathfrak{M}_\mu := \{E \subset X \mid E \text{ ist messbar bezüglich } \mu^*\}$ . Dann ist die Einschränkung  $\bar{\mu} := \mu^*|_{\mathfrak{M}_\mu}$  eine Ausdehnung von  $\mu$  auf eine  $\sigma$ -Algebra, welche  $\mathfrak{A}$  enthält.

**Bemerkung 2.9:** Im Allgemeinen gilt  $\sigma(\mathfrak{A}) \subsetneq \mathfrak{M}_\mu$ , aber  $\mathfrak{M}_\mu$  ist nur ein wenig größer in „guten“ Fällen – dann ist  $\mathfrak{M}_\mu$  die Vervollständigung von  $\sigma(\mathfrak{A})$  bezüglich  $\bar{\mu}|_{\sigma(\mathfrak{A})}$ .

**Satz 2.10:** Sei  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$  ein Maßraum. Setze

$$\tilde{\mathfrak{M}} := \{E \subset X \mid \exists A, B \in \mathfrak{M} : A \subset E \subset B \text{ mit } \mu(B \setminus A) = 0\}$$

und  $\tilde{\mu}(E) := \mu(A)$  in diesem Fall. Dann ist  $\tilde{\mathfrak{M}}$  eine  $\sigma$ -Algebra und  $\tilde{\mu}$  ein Maß auf dieser  $\sigma$ -Algebra.

**Beweis:** Nachrechnen. ■

**Definition 2.11:** Der Maßraum  $(X, \tilde{\mathfrak{M}}, \tilde{\mu})$  heißt die *Vervollständigung* des Maßraums  $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ .

**Definition 2.12:** Ein Maß auf  $(X, \mathfrak{A})$  ist

- (1) ein *Wahrscheinlichkeitsmaß*, falls  $\mu(X) = 1$ .
- (2) *endlich*, falls  $\mu(X) < \infty$ .
- (3)  *$\sigma$ -endlich*, falls  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ , so dass  $X_n \in \mathfrak{A}$  und  $\mu(X_n) < \infty \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Bemerkung 2.13:** (1)  $\sigma$ -endliche Maße sind die „guten“, nicht  $\sigma$ -endliche Maße haben einige pathologische Eigenschaften.

- (2) Es gilt: Falls  $\mu$  ein  $\sigma$ -endliches Prämaß auf einer Algebra  $\mathfrak{A}$  ist, dann ist  $\mathfrak{M}_\mu$  die Vervollständigung von  $\sigma(\mathfrak{A})$  bezüglich  $\bar{\mu}$ .

**Definition 2.14:** (1) Die Anwendung des Ausdehnungssatzes [Satz 2.8](#) auf das [Beispiel 2.3](#) ergibt das Lebesgue-Maß  $\lambda$  auf  $\mathbb{R}$ . Das Lebesgue-Maß ist definiert entweder auf den Borelmengen  $\mathfrak{B} := \sigma(\tau)$ , oder auf der Vervollständigung  $\mathfrak{M}_\lambda$  der Borel- $\sigma$ -Algebra, man nennt  $\mathfrak{M}_\lambda$  für gewöhnlich die Lebesgue-messbaren Mengen. Das Lebesgue-Maß  $\lambda$  ist charakterisiert durch  $\lambda([a, b]) = b - a$  (diese eindeutige Charakterisierung werden wir im nächsten Kapitel sehen).

- (2) Das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^k$  ergibt sich analog durch die Ausdehnung des Prämaßes

$$\lambda\left(\prod_{i=1}^k [a_i, b_i]\right) = \prod_{i=1}^k (b_i - a_i) = \text{vol}\left(\prod_{i=1}^k [a_i, b_i]\right).$$

**Bemerkung 2.15:** (1) Das Lebesgue-Maß  $\lambda$  ist  $\sigma$ -endlich auf  $\mathbb{R}$ , da wir schreiben können  $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$  und  $\lambda([-n, n]) = 2n < \infty$ .

- (2) Man benötigt das Auswahlaxiom um zu zeigen,

- dass es nicht-messbare Mengen gibt, also  $E \subset \mathbb{R}$  mit  $E \notin \mathfrak{M}_\lambda$
- dass  $\mathfrak{B} \neq \mathfrak{M}_\lambda$ .

### 3. Der Satz über monotone Klassen und die Eindeutigkeit der Ausdehnung von Prämaßen

**Definition 3.1:** Eine Klasse  $\mathcal{M}$  von Teilmengen von  $X$  heißt *monoton*, falls gilt

- (1) Für  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$  mit  $A_n \nearrow A$  gilt  $A \in \mathcal{M}$ ,
- (2) Für  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$  mit  $A_n \searrow A$  gilt  $A \in \mathcal{M}$ .

**Notation 3.2:** Sei  $\mathcal{F}$  eine Familie von Teilmengen von  $X$ . Dann bezeichnen wir mit

$$\mathcal{M}(\mathcal{F}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{F} \subset \mathcal{M} \\ \mathcal{M} \text{ monotone Klasse}}} \mathcal{M}$$

die von  $\mathcal{F}$  erzeugte monotone Klasse.

**Bemerkung 3.3:** (1) Die Potenzmenge  $\mathfrak{P}(X)$  ist eine monotone Klasse, der Schnitt ist also nichtleer. Man überzeugt sich leicht, dass der Durchschnitt über monotone Klassen wieder eine monotone Klasse ist. Somit ist  $\mathcal{M}(\mathcal{F})$  die kleinste monotone Klasse, welche  $\mathcal{F}$  enthält.

- (2) Eine  $\sigma$ -Algebra ist immer auch eine monotone Klasse, d. h.  $\mathcal{M}(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{F})$ .
- (3) Eine Algebra  $\mathfrak{S}$ , die gleichzeitig auch eine monotone Klasse ist, ist schon eine  $\sigma$ -Algebra. Sei nämlich  $A_1, A_2, \dots \in \mathfrak{S}$ . Damit  $\mathfrak{S}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist, muss  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{S}$  gelten. Betrachte z. B.  $B_i := \bigcup_{n=1}^i A_n$ , dann gelten die Eigenschaften  $B := \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$  und  $B_n \nearrow B$ , also  $B \in \mathfrak{S}$ .

**Satz 3.4 (über monotone Klassen):** Sei  $\mathfrak{A}$  eine Algebra und  $\mathcal{M}$  eine monotone Klasse. Es gelten dann:

- (1)  $\sigma(\mathfrak{A}) = \mathcal{M}(\mathfrak{A})$
- (2) Falls  $\mathfrak{A} \subset \mathcal{M}$ , dann gilt  $\sigma(\mathfrak{A}) \subset \mathcal{M}$ .

**Beweis:** Gilt die erste Behauptung, so gilt die Implikation

$$\mathfrak{A} \subset \mathcal{M} \Rightarrow \sigma(\mathfrak{A}) = \mathcal{M}(\mathfrak{A}) \subset \mathcal{M}.$$

Setze zum Beweis des ersten Teils  $\mathfrak{S} := \mathcal{M}(\mathfrak{A})$ . Wir zeigen nun, dass  $\mathfrak{S}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist, dann gilt nämlich  $\sigma(\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{S}$ , die andere Inklusion gilt nach **Bemerkung 3.3 (2)**, was dann  $\sigma(\mathfrak{A}) = \mathcal{M}(\mathfrak{A})$  zeigt. Nach **Bemerkung 3.3 (3)** genügt nun zu zeigen, dass  $\mathfrak{S}$  eine Algebra ist, weil  $\mathfrak{S}$  bereits eine monotone Klasse ist.

Wir müssen also zeigen, dass  $\mathfrak{S}$  unter Vereinigung und Komplementbildung abgeschlossen ist. Betrachte zunächst die Vereinigung. In  $\mathfrak{S}$  fixiere zunächst ein  $A \in \mathfrak{A}$  und setze

$$\mathcal{C}(A) := \{B \in \mathfrak{S} \mid A \cup B \in \mathfrak{S}\}.$$

Zunächst stellen wir wegen  $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{S}$  fest, dass  $\mathfrak{A} \subset \mathcal{C}(A)$ . Seien nun  $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{C}(A)$  mit  $B_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathfrak{S}$ . Wir haben aber nun, dass  $A \cup B_1 \in \mathfrak{S}$ ,  $A \cup B_2 \in \mathfrak{S}$ , und

so weiter. Insgesamt erhalten wir  $A \cup B_n \nearrow A \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \in \mathfrak{S}$ , da  $\mathfrak{S}$  monoton ist. Das heißt  $A \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) \in \mathfrak{S}$ , also gilt  $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{C}(A)$ . Das ganze funktioniert analog für  $B_n \searrow$ , also ist  $\mathcal{C}(A)$  eine monotone Klasse und  $\mathfrak{A} \subset \mathcal{C}(A)$ , damit gilt  $\mathcal{C}(A) \supset \mathfrak{S}$ , die andere Inklusion ist klar nach der Definition, d. h.  $\mathcal{C}(A) = \mathfrak{S} \ \forall A \in \mathfrak{A}$ . Somit haben wir gezeigt: für  $A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{S}$  gilt  $A \cup B \in \mathfrak{S}$ .

Fixiere nun  $B \in \mathfrak{S}$ , setze

$$\mathcal{C}(B) := \{A \in \mathfrak{S} \mid A \cup B \in \mathfrak{S}\}.$$

Mit den selben Argumenten wie im ersten Teil gilt  $\mathfrak{A} \subset \mathcal{C}(B)$  und  $\mathcal{C}(B) = \mathfrak{S}$ , also gilt: für  $A, B \in \mathfrak{S}$  gilt  $A \cup B \in \mathfrak{S}$ .

Analog zeigen wir die Abgeschlossenheit bzgl. dem Komplement, also ist  $\mathfrak{S}$  eine Algebra, somit (da auch eine monotone Klasse) eine  $\sigma$ -Algebra und die Behauptung folgt. ■

**Satz 3.5 (über die Eindeutigkeit der Ausdehnung von Maßen):** *Seien  $\mathfrak{A}$  eine Algebra und  $\mu_1, \mu_2$  zwei  $\sigma$ -endliche Maße auf  $\sigma(\mathfrak{A})$ . Dann gilt: falls  $\mu_1|_{\mathfrak{A}} = \mu_2|_{\mathfrak{A}}$  gilt, dann gilt schon  $\mu_1 = \mu_2$  auf  $\sigma(\mathfrak{A})$ .*

**Beweis:** Betrachte zunächst endliche Maße  $\mu_1, \mu_2$ . Setze

$$\mathcal{M} := \{A \in \sigma(\mathfrak{A}) \mid \mu_1(A) = \mu_2(A)\}.$$

Gemäß Voraussetzung gilt nun  $\mathfrak{A} \subset \mathcal{M}$ . Wenn wir nun zeigen können, dass  $\mathcal{M}$  eine monotone Klasse ist, dann gilt  $\sigma(\mathfrak{A}) \subset \mathcal{M}$ , und somit unsere Behauptung. Um die Monotonie von  $\mathcal{M}$  zu sehen, seien  $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{M}$  mit  $A_n \nearrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ . Es gilt nun

$$\mu_2\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_2(A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_1(A_n) = \mu_1\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right),$$

also gilt  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ . Analog für  $A_n \searrow$  – an dieser Stelle geht die Voraussetzung der Endlichkeit der Maße ein, vergleiche dazu [Satz 1.4](#).

Den  $\sigma$ -endlichen Fall führt man auf den endlichen Fall zurück durch Einschränkung von  $\mu_1, \mu_2$  auf  $X_n$ , wobei  $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ . ■

**Bemerkung 3.6:** (1) Die Eindeutigkeit der Ausdehnung geht verloren, wenn das Maß nicht  $\sigma$ -endlich ist.

- (2) [Satz 3.5](#) und [Bemerkung 2.13](#) sagen, dass das Lebesgue-Maß sowohl auf Borel-Mengen als auch auf den Lebesgue-messbaren Mengen eindeutig durch seine Werte auf Intervallen bestimmt ist.
- (3) Der Satz über monotone Klassen ist ein wichtiges Werkzeug, um Aussagen von „einfachen“ auf „komplizierte“ Mengen fortzusetzen. Oft werden stattdessen auch Dynkin-Systeme und  $\pi$ - $\lambda$ -Systeme benutzt, um äquivalente Aussagen zu etablieren.

## 4. Die Vektorräume $\mathcal{C}_c(X)$ , $\mathcal{C}_0(X)$ und der Riesz'sche Darstellungssatz

**Definition 4.1:** Sei  $X$  ein topologischer Raum.

- (1)  $K \subset X$  heißt *kompakt*, falls jede offene Überdeckung von  $K$  eine endliche Teilüberdeckung besitzt.
- (2) Eine *Umgebung* von  $x \in X$  ist eine Menge  $N$ , so dass es ein  $U \in \tau$  gibt, so dass  $x \in U \subset N$ .
- (3)  $X$  heißt *lokalkompakt*, falls jedes  $x \in X$  eine kompakte Umgebung besitzt.
- (4)  $X$  heißt *Hausdorff'sch*, falls gilt: für  $x, y \in X$  mit  $x \neq y$ , gibt es Umgebungen  $N_x$  von  $x$ ,  $N_y$  von  $y$ , so dass  $N_x \cap N_y = \emptyset$ .

**Beispiel 4.2:** (1)  $X = \mathbb{R}$  ist lokalkompakt, aber nicht kompakt;  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  ist kompakt.

- (2) Alle metrischen Räume und insbesondere alle normierten Vektorräume sind Hausdorff'sch.
- (3) Sei  $X$  ein Banachraum.  $X$  ist genau dann lokalkompakt, wenn  $X$  endlichdimensional ist.

**Notation 4.3:** Sei  $X$  ein lokalkompakter Hausdorffraum. Wir definieren dann die Unterräume  $\mathcal{C}_c(X), \mathcal{C}_0(X) \subset \mathcal{C}(X)$  als

- (1)  $\mathcal{C}_c(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig und } \text{supp}(f) \text{ kompakt}\}$ ,
- (2)  $\mathcal{C}_0(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig und für alle } \varepsilon > 0 \text{ gibt es kompaktes } K \subset X : |f(x)| < \varepsilon \forall x \notin K\}$ .

wobei  $\text{supp}(f) := \overline{\{x \mid f(x) \neq 0\}}$ . Wir nennen  $\mathcal{C}_c(X)$  die *stetigen Funktionen mit kompaktem Träger* und  $\mathcal{C}_0(X)$  die *stetigen Funktionen, welche im Unendlichen verschwinden*.

Ist  $X$  kompakt, dann gilt  $\mathcal{C}_c(X) = \mathcal{C}_0(X) = \mathcal{C}(X)$ .

**Bemerkung 4.4:** (1)  $\mathcal{C}_c(X)$  und  $\mathcal{C}_0(X)$  sind Vektorräume über  $\mathbb{C}$ ; falls  $X$  unendliche Menge ist, so sind die Vektorräume unendlichdimensional.

- (2)  $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$  definiert eine Norm auf  $\mathcal{C}_c(X), \mathcal{C}_0(X)$ .
- (3)  $\mathcal{C}_0(X)$  ist vollständig bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$ , ist also ein Banachraum;  $\mathcal{C}_c(X)$  ist im Allgemeinen (falls  $X$  nicht kompakt ist) nicht vollständig. Bezüglich  $\|\cdot\|_\infty$  ist der topologische Abschluss  $\overline{\mathcal{C}_c(X)}$  von  $\mathcal{C}_c(X)$  der Raum  $\mathcal{C}_0(X)$ .
- (4) Die beiden Räume  $\mathcal{C}_0(X), \mathcal{C}_c(X)$  sind Teilräume von

$$\mathcal{C}_b(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ stetig und beschränkt}\},$$

dem Raum der stetigen beschränkten Abbildungen von  $X$  nach  $\mathbb{C}$ .



**Bemerkung 4.5:** Sei  $\mu$  ein Borelmaß auf  $X$  (d. h.  $\mu$  ist ein Maß auf der Borel'schen  $\sigma$ -Algebra), so dass  $\mu(K) < \infty$  für alle  $K \subset X$  kompakt. Dann ist  $f$  integrierbar für alle  $f \in \mathcal{C}_c(X)$ , denn es gilt

$$\int_X |f| d\mu = \int_{\text{supp}(f)} |f| d\mu \leq \int_{\text{supp}(f)} \|f\|_\infty d\mu = \mu(\text{supp}(f)) \cdot \|f\|_\infty < \infty.$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} \int_X : \mathcal{C}_c(X) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \int_X f d\mu \end{aligned}$$

ein lineares Funktional.  $\int_X$  ist außerdem positiv, es gilt also  $f \geq 0 \Rightarrow \int_X f d\mu \geq 0$ .

**Satz 4.6 (Riesz'scher Darstellungssatz):** Sei  $X$  ein lokalkompakter Hausdorffraum und

$$\Lambda : \mathcal{C}_c(X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

ein positives lineares Funktional auf  $\mathcal{C}_c(X)$ . Dann gibt es ein Borel-Maß  $\mu$  auf  $X$ , so dass

$$\Lambda(f) = \int_X f d\mu \tag{I.2}$$

für alle  $f \in \mathcal{C}_c(X)$ . Das Maß  $\mu$  hat die folgenden Regularitätseigenschaften:

- (1)  $\mu(K) < \infty$  für alle  $K \subset X$  kompakt,
- (2)  $\mu(E) = \inf\{\mu(V) \mid E \subset V, V \text{ offen}\}$  für alle  $E \in \mathfrak{B}$ .
- (3)  $\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset E, K \text{ kompakt}\}$  für alle  $E \in \mathfrak{B}$  mit  $\mu(E) < \infty$ .

Zusammen mit Gl. (I.2) bestimmen diese Regularitätseigenschaften das Maß  $\mu$  eindeutig.

**Bemerkung 4.7:** In vielen Situationen (wie zum Beispiel wenn  $X$  kompakt, oder wenn  $X = \mathbb{R}$  ist) gilt: ein Borel-Maß, das (1) aus Satz 4.6 erfüllt, erfüllt dann schon (2) und (3).

**Beweis:** Wir wollen nur eine sehr grobe Beweisskizze geben. Zuerst stellen wir fest:  $\mu(E)$  entspricht  $\Lambda(1_E)$ , wir approximieren  $1_E$  durch stetige Funktionen. Die Positivität von  $\Lambda$  entspricht einer Stetigkeitseigenschaft. Es reicht  $\mu(V)$  für  $V$  offen zu kennen, dafür setzen wir

$$\mu(V) := \sup\{\Lambda(f) \mid f \in \mathcal{C}_c(X), 0 \leq f \leq 1_V\},$$

Es bleiben dann sehr viele Einzelheiten nachzuprüfen. ■

**Bemerkung 4.8:** Die Funktion  $\Lambda$  aus Satz 4.6 dehnt im Allgemeinen nicht auf  $\mathcal{C}_0(X)$  aus. Ein Beispiel dafür ist das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}$ , in diesem Fall

$$\Lambda(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\lambda(x).$$

Allerdings ist zum Beispiel die Funktion

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{|x|} & |x| \geq 1 \\ 1 & |x| < 1 \end{cases}$$

nicht integrierbar,  $f$  ist jedoch in  $\mathcal{C}_0(X)$ .

Allgemein gilt: Sei  $\Lambda : \mathcal{C}_0(X) \longrightarrow \mathbb{C}$  ein positives lineares Funktional. Dann ist

$$\|\Lambda\| := \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}_0(X) \\ f \neq 0}} \frac{|\Lambda(f)|}{\|f\|} = \sup_{\substack{f \in \mathcal{C}_0(X) \\ \|f\|=1}} |\Lambda(f)| < \infty,$$

$\Lambda$  ist somit beschränkt, also stetig: Sei nämlich  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine konvergente Folge mit  $f_n \rightarrow f$ . Damit  $\Lambda$  stetig ist, muss  $\Lambda(f_n) \rightarrow \Lambda(f)$  gelten und dies gilt dann auch:

$$|\Lambda(f_n) - \Lambda(f)| = |\Lambda(f_n - f)| \\ \leq \|\Lambda\| \|f_n - f\| \rightarrow 0.$$

Somit gilt dann aber

$$\mu(X) = \sup\{\Lambda(f) \mid f \in \mathcal{C}_c(X), 0 \leq f \leq 1\} \leq \|\Lambda\| < \infty,$$

d. h. das Maß, das der Riesz'schen Darstellungssatz liefert, muss also endlich sein. Somit sind die positiven linearen Funktionale auf  $\mathcal{C}_0(X)$  nicht durch beliebige Borel-Maße gegeben, sondern durch die endlichen.

Wir wollen nun noch sehen, dass die Positivität des Funktionales auf dem vollständigen Raum  $\mathcal{C}_0(X)$  die Stetigkeit impliziert.

**Satz 4.9:** Sei  $\Lambda : \mathcal{C}_0(X) \rightarrow \mathbb{C}$  ein positives lineares Funktional. Dann ist  $\Lambda$  beschränkt, d. h.  $\|\Lambda\| < \infty$  (und damit insbesondere stetig).

**Beweis:** Wir nehmen an,  $\Lambda$  sei unbeschränkt, es gebe also  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_0(X)$  mit  $\|f_n\| \leq 1$  für alle  $n$  und  $|\Lambda(f_n)| \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ . Wegen der Zerlegung

$$f = (\operatorname{Re}(f))^+ - (\operatorname{Re}(f))^- + i[(\operatorname{Im}(f))^+ - (\operatorname{Im}(f))^-]$$

finden wir dann auch solche Folgen, dass  $f_n \geq 0$  für alle  $n$ . Durch Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen  $\Lambda(f_n) \geq 2^n$ . Setze dann

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{2^n}$$

#### 4. Die Vektorräume $\mathcal{C}_c(X)$ , $\mathcal{C}_0(X)$

Es ist  $f \in \mathcal{C}_0(X)$ , da  $f$  durch eine Cauchyfolge gegeben ist und  $\mathcal{C}_0(X)$  vollständig ist. Dann gilt aber

$$\mathbb{R} \in \Lambda(f) \geq \Lambda\left(\sum_{n=1}^N \frac{f_n}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^N \frac{\Lambda(f_n)}{2^n} \geq N \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

was im Widerspruch zu  $\Lambda(f) \in \mathbb{R}$  steht. Damit muss  $\Lambda$  beschränkt sein. ■

## 5. Produktmaße und der Satz von Fubini

**Definition 5.1:** Seien  $X, Y$  zwei Mengen.

- (1) Das *kartesische Produkt*  $X \times Y$  ist die Menge

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Eine Menge der Form  $A \times B \subset X \times Y$  für  $A \subset X, B \subset Y$  heißt *Rechteck* in  $X \times Y$ .

- (2) Sei  $\mathfrak{X}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $X$ ,  $\mathfrak{Y}$  eine  $\sigma$ -Algebra auf  $Y$ . Ein *messbares Rechteck* ist dann eine Menge der Form  $A \times B$  mit  $A \in \mathfrak{X}, B \in \mathfrak{Y}$ . Die zugehörige *Produkt- $\sigma$ -Algebra* ist definiert als

$$\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} := \sigma(\{A \times B \mid A \in \mathfrak{X}, B \in \mathfrak{Y}\}).$$

- (3) Für ein  $E \in X \times Y, x \in X, y \in Y$  setzen wir

- (i)  $E_x := \{y \in Y \mid (x, y) \in E\} \subset Y$ ,  
 (ii)  $E^y := \{x \in X \mid (x, y) \in E\} \subset X$ .

Im Folgenden sind  $(X, \mathfrak{X}), (Y, \mathfrak{Y})$  fixiert.

**Satz 5.2:** Setze

$$\mathfrak{A} := \{Q = \bigcup_{i=1}^n R_i \mid n \in \mathbb{N}, R_i \text{ messbare Rechtecke}, R_i \cap R_j = \emptyset \text{ für } i \neq j\}.$$

Dann ist  $\mathfrak{A}$  eine Algebra und somit gilt  $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} = \mathcal{M}(\mathfrak{A})$ .

**Beweis:** Damit  $\mathfrak{A}$  eine Algebra ist müssen wir nachprüfen, dass

- (1)  $Q \in \mathfrak{A} \Rightarrow Q^c \in \mathfrak{A}$ ,  
 (2)  $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{A} \Rightarrow Q_1 \cup Q_2 \in \mathfrak{A}$ .

Sei für (1) zunächst  $R = A \times B$ , dann ist  $R^c = (A^c \times B) \cup (A \times B^c) \cup (A^c \times B^c) \in \mathfrak{A}$ ; ist  $R$  Vereinigung von mehr Rechtecken, funktioniert das ganze analog mit disjunkten Zerlegungen. Zu (2) zerlege ebenfalls die Vereinigung von zwei Rechtecken in eine disjunkte Vereinigung von messbaren Rechtecken.

Somit ist  $\mathfrak{A}$  eine Algebra. Damit ist dann aber nach dem Satz über monotone Klassen

$$\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} = \sigma(\mathfrak{A}) = \mathcal{M}(\mathfrak{A}). \quad \blacksquare$$

**Satz 5.3:** Für  $E \subset \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$  gilt  $E_x \in \mathfrak{Y} \forall x \in X$  und  $E^y \in \mathfrak{X} \forall y \in Y$ .

**Beweis:** Setze

$$\mathfrak{F} := \{E \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} \mid E_x \in \mathfrak{Y} \forall x \in X\}.$$

Zu zeigen sind, dass die messbaren Rechtecke in  $\mathfrak{F}$  liegen, und dass  $\mathfrak{F}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist – dann liegt die von den messbaren Rechtecken erzeugten  $\sigma$ -Algebra in  $\mathfrak{F}$ , also gilt

$\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} = \mathfrak{F}$ . Sei für den ersten Teil der Behauptung  $E = A \times B$  für  $A \in \mathfrak{X}, B \in \mathfrak{Y}$ . Dann ist

$$E_x = \begin{cases} \emptyset & x \in A^c \\ B & x \in A \end{cases},$$

damit ist  $E_x \in \mathfrak{Y} \forall x \in X$ , also  $E \in \mathfrak{F}$ .

Dass  $\mathfrak{F}$  eine  $\sigma$ -Algebra ist, ist klar, da  $(E^c)_x = (E_x)^c$  und  $(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n)_x = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_n)_x$ . Analog für die Fasern  $E^y$ . ■

**Notation 5.4:** Sei  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ . Wir setzen

- (1)  $f_x : Y \rightarrow \mathbb{C}, y \mapsto f_x(y) = f(x, y)$ ,
- (2)  $f^y : X \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto f^y(x) = f(x, y)$ .

**Satz 5.5:** Sei  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$  eine  $(\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y})$ -messbare Funktion auf  $X \times Y$ . Dann ist  $f_x$  für jedes  $x \in X$  eine  $\mathfrak{Y}$ -messbare Funktion auf  $Y$  und  $f^y$  für jedes  $y \in Y$  eine  $\mathfrak{X}$ -messbare Funktion auf  $X$ .

**Beweis:** Es genügt für den Beweis des Satzes reellwertige Funktionen zu betrachten. Sei  $B \subset \mathbb{R}$  eine Borelmenge. Zu zeigen ist, dass  $f_x^{-1}(B) \in \mathfrak{Y}$  gilt. Wir haben

$$f_x^{-1}(B) = \{y \in Y \mid f_x(y) \in B\} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in X \times Y \mid f(\tilde{x}, \tilde{y}) \in B\}_x = (f^{-1}(B))_x.$$

$f$  ist messbar, also ist  $f^{-1}(B) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ , also gilt nach Satz 5.3.  $(f^{-1}(B))_x \in \mathfrak{Y}$ . Wir haben also gezeigt, dass  $f_x^{-1}(B) \in \mathfrak{Y} \forall B \in \mathfrak{B}$ , also ist  $f_x$   $\mathfrak{Y}$ -messbar.

Analog für die  $f^y$ . ■

**Satz 5.6:** Seien  $(X, \mathfrak{X}, \mu)$  und  $(Y, \mathfrak{Y}, \nu)$  Maßräume mit  $\sigma$ -endlichen Maßen. Für  $Q \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$  setzen wir

- (1)  $\varphi(x) := \nu(Q_x) \forall x \in X$ ,
- (2)  $\psi(y) := \mu(Q^y) \forall y \in Y$ .

Dann ist  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathfrak{X}$ -messbar und  $\psi : Y \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathfrak{Y}$ -messbar und es gilt

$$\int_X \varphi d\mu = \int_Y \psi d\nu.$$

**Beweis:** Wir betrachten nur endliche Maße  $\mu, \nu$ . Setze

$$\mathfrak{F} := \{Q \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} \mid Q \text{ erfüllt die Behauptung des Satzes}\}.$$

Zu zeigen ist, dass  $\mathfrak{A} \in \mathfrak{F}$  gilt, und dass  $\mathfrak{F}$  eine monotone Klasse ist – dann wären  $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y} = \mathcal{M}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{F}$ .

- (1) Betrachte zunächst  $Q = R = A \times B$  für  $A \in \mathfrak{X}, B \in \mathfrak{Y}$ . Dann gelten

$$Q_x = \begin{cases} B & x \in A, \\ \emptyset & x \notin A. \end{cases}, \quad Q^y = \begin{cases} A & y \in B, \\ \emptyset & y \notin B. \end{cases}.$$

## I. Integrationstheorie

Dann ist  $\varphi(x) = \nu(Q_x) = \nu(B) \cdot 1_A(x)$  und  $\psi(y) = \mu(Q^y) = \mu(A) \cdot 1_B(x)$ . Damit sind  $\varphi, \psi$  messbar und es gilt

$$\begin{aligned} \int_X \varphi d\mu &= \nu(B) \int_X 1_A(x) d\nu(x) = \nu(B)\mu(A) \\ \int_Y \psi d\nu &= \mu(A) \int_Y 1_B(y) d\mu(y) = \mu(A)\nu(B), \end{aligned}$$

also  $Q \in \mathfrak{F}$ . Betrachte nun  $Q = R_1 \cup \dots \cup R_n$  mit paarweise disjunkten messbaren Rechtecken  $R_i$ . Mit ähnlichen Argumenten wie für ein Rechteck gilt dann auch  $Q \in \mathfrak{F}$ . Beachte dabei, dass  $Q_x = (R_1)_x \cup \dots \cup (R_n)_x$ , also dass  $Q_x$  eine disjunkte Vereinigung ist.

- (2) Betrachte  $Q_i \nearrow Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$  mit  $Q_i \in \mathfrak{F} \forall i$ , dann muss gelten, dass auch  $Q \in \mathfrak{F}$ . Seien  $\varphi_i(x) = \nu(Q_{i,x})$ ,  $\varphi(x) = \nu(Q_x)$ ,  $\psi_i(y) = \mu(Q_i^y)$ ,  $\psi(y) = \mu(Q^y)$ . Wegen  $(Q_i)_x \nearrow Q_x$  gilt  $\nu(Q_{i,x}) \rightarrow \nu(Q_x)$ , also  $\varphi_i(x) \rightarrow \varphi(x)$ , somit gilt  $\varphi_i(x) \nearrow \varphi(x) \forall x \in X$ , analog gilt  $\psi_i(y) \nearrow \psi(y) \forall y \in Y$ . Nun ist der Satz über die monotone Konvergenz anwendbar, dieser liefert

$$\int_X \varphi_i d\mu \rightarrow \int_X \varphi d\mu \quad , \quad \int_Y \psi_i d\nu \rightarrow \int_Y \psi d\nu,$$

Nach Voraussetzung gilt für alle  $i$  dass  $Q_i \in \mathfrak{F}$ , also  $\int_X \varphi_i d\mu = \int_Y \psi_i d\nu$ ; somit folgt dann  $\int_X \varphi d\mu = \int_Y \psi d\nu$ , also  $Q \in \mathfrak{F}$ .

Analog für  $Q_i \searrow Q$ , da die betrachteten Maße alle endlich sind. Damit ist  $\mathfrak{F}$  eine monotone Klasse. ■

**Definition 5.7:** Sei  $Q \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ . Wir setzen

$$(\mu \times \nu)(Q) := \int_X \nu(Q_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(Q^y) d\nu(y)$$

und nennen  $\mu \times \nu$  dann das *Produktmaß* von  $\mu$  und  $\nu$ .

**Satz 5.8:** *Seien  $(X, \mathfrak{X}, \mu)$  und  $(Y, \mathfrak{Y}, \nu)$  zwei  $\sigma$ -endliche Maßräume. Dann ist auch  $(\mu \times \nu)$  ein  $\sigma$ -endliches Maß auf  $X \times Y$  und es ist eindeutig bestimmt durch seine Werte auf den messbaren Rechtecken*

$$(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$$

für alle  $A \in \mathfrak{X}, B \in \mathfrak{Y}$ . Sind  $\mu$  und  $\nu$  endliche Maße, dann ist auch  $\mu \times \nu$  ein endliches Maß.

**Beweis:**  $\mu \times \nu$  ist ein Maß: Seien nämlich  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  paarweise disjunkt, dann ist

$$\begin{aligned} (\mu \times \nu)\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right) &= \int_X \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right)_x d\mu = \int_X \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (Q_n)_x\right) d\mu \\ &= \int_X \sum_{n=1}^{\infty} \nu((Q_n)_x) d\mu \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_X \nu((Q_i)_x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu \times \nu)(Q_i).$$

In der vorletzten Umformung haben wir dabei den Satz von der monotonen Konvergenz benutzt.

Weiter ist  $\mu \times \nu$   $\sigma$ -endlich: Sind nämlich  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ ,  $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n$ , dann ist  $X \times Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \times Y_n$  und  $(\mu \times \nu)(X_n \times Y_m) = \mu(X_n)\nu(Y_m) < \infty$ .

Sind  $\mu$  und  $\nu$  beide endlich, so ist auch  $\mu \times \nu$  wieder endlich, da  $(\mu \times \nu)(X \times Y) = \mu(X)\nu(Y)$ .

Schließlich ist das Maß  $(\mu \times \nu)$  durch  $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$  auf der Algebra  $\mathfrak{A}$  bestimmt und somit nach dem Ausdehnungssatz [Satz 2.8](#) auf  $\sigma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ . ■

**Bemerkung 5.9:** Sei  $\lambda^n$  das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}^n$ . Dieses hatten wir durch das Volumen von  $n$ -dimensionalen Quadern auf  $n$ -dimensionalen Quadern definiert. Nach [Satz 5.8](#) ist  $\lambda^{m+n} = \lambda^m \times \lambda^n$ , insbesondere  $\lambda^n = \prod_{i=1}^n \lambda$ .

**Satz 5.10 (von Fubini):** Seien  $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ ,  $(Y, \mathfrak{Y}, \nu)$  zwei  $\sigma$ -endliche Maßräume und  $f$  eine  $\mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ -messbare Funktion auf  $X \times Y$ .

(1) Sei  $0 \leq f \leq \infty$ . Definiere

$$(i) \quad \varphi(x) := \int_Y f_x d\nu \quad \forall x \in X,$$

$$(ii) \quad \psi(y) := \int_X f^y d\mu \quad \forall y \in Y.$$

Dann sind  $\varphi$   $\mathfrak{X}$ -messbar,  $\psi$   $\mathfrak{Y}$ -messbar und es gilt

$$\begin{aligned} \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) &= \int_X \varphi d\mu \\ &= \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu) \\ &= \int_Y \psi d\nu \\ &= \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y). \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

(2) Ist  $f$  komplexwertig und gilt

$$\int_X \left( \int_Y |f(x, y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) < \infty,$$

dann ist  $f \in L^1(\mu \times \nu)$ .

(3) Sei  $f \in L^1(\mu \times \nu)$ , dann ist  $f_x \in L^1(\nu)$  für fast alle  $x \in X$ , genauso  $f^y \in L^1(\mu)$  für fast alle  $y \in Y$  und die Funktionen  $\varphi, \psi$ , definiert wie in (1) fast überall, sind in  $L^1(\mu)$  bzw.  $L^1(\nu)$  und [Gl. \(I.3\)](#) gilt.

## I. Integrationstheorie

**Beweis:** (1) Nach [Satz 5.5](#) sind  $f_x, f^y$  messbar und  $\varphi, \psi$  wohldefiniert. Betrachte zunächst  $f = 1_Q$  mit  $Q \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ . Dann ist

$$\begin{aligned}(\mu \times \nu)(Q) &= \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu), \\ \int_X \nu(Q_x) d\mu(x) &= \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x), \\ \int_Y \mu(Q^y) d\nu(y) &= \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y),\end{aligned}$$

und nach [Sätzen 5.6](#) und [5.8](#) folgt die Behauptung in diesem Fall. Betrachtung von Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen liefert die Behauptung für nicht-negative einfache Funktionen wegen der Linearität des Integrals.

Sei nun  $f \geq 0$  messbar. Gemäß [Satz 1.17](#) gibt es einfache Funktionen  $s_n \geq 0$ , so dass  $s_n \nearrow f$  punktweise, d. h.  $s_n(x, y) \nearrow f(x, y) \forall x \in X, y \in Y$ . Setze  $\varphi_n(x) := \int_Y (s_n)_x d\nu$ . Mit dem Satz über die monotone Konvergenz gilt  $\varphi_n(x) \nearrow \varphi(x) \forall x \in X$ . Mit dem bereits gezeigten gilt

$$\int_X \varphi_n d\mu = \int_{X \times Y} s_n d(\mu \times \nu),$$

und wegen  $\int_X \varphi_n d\mu \rightarrow \int_X \varphi d\mu$  und  $\int_{X \times Y} s_n d(\mu \times \nu) \rightarrow \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu)$  folgt dann auch  $\int_X \varphi d\mu = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu)$ . Analog für  $\psi$ .

- (2) Wende (1) an auf  $|f|$ .  
 (3) Es genügt, (3) für reellwertige Funktionen zu zeigen wegen der Zerlegung von  $f$  in reellen und komplexen Anteil. Zerlege nun reellwertiges  $f$  in Positiv- und Negativteil,  $f = f^+ - f^-$  und nenne die zu  $f, f^+, f^-$  zugehörigen  $\varphi$ -Funktionen  $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ . Es gilt

$$\int_X \varphi_1 d\mu = \int_{X \times Y} f^+ d(\mu \times \nu) \leq \int_{X \times Y} |f| d(\mu \times \nu) < \infty,$$

da  $f \in L^1(\mu \times \nu)$ . Also gilt  $\varphi_1 \in L^1(\mu)$ ; analog für  $\varphi_2$ .

Wegen  $f_x = (f^+)_x - (f^-)_x$  erhalten wir

$$\int_Y f_x d\nu = \underbrace{\int_Y (f^+)_x d\nu}_{\varphi_1(x)} - \underbrace{\int_Y (f^-)_x d\nu}_{\varphi_2(x)},$$

falls  $\varphi_1(x), \varphi_2(x) < \infty$ . Da  $\varphi_1 \in L^1(\mu)$  und  $\varphi_2 \in L^1(\mu)$  gilt fast überall  $\varphi_1(x) < \infty, \varphi_2(x) < \infty$ , also ist  $\varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) < \infty$  fast überall, also gilt  $\varphi \in L^1(\mu)$ . Mit (1) folgt dann

$$\int_X \varphi_1 d\mu = \int_{X \times Y} f^+ d(\mu \times \nu) < \infty, \quad \int_X \varphi_2 d\mu = \int_{X \times Y} f^- d(\mu \times \nu) < \infty,$$

also (da  $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi$  f. ü.)

$$\int_X \varphi d\mu = \int_X (\varphi_1 - \varphi_2) d\mu = \int_{X \times Y} (f^+ - f^-) d(\mu \times \nu) = \int_{X \times Y} f d(\mu \times \nu).$$

Für  $\psi$  gehen wir analog vor. ■



**Beispiel 5.11:** Wir versuchen das Integral  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$  zu berechnen. Betrachte dazu das Doppelintegral

$$\int_0^\infty \int_0^\infty ye^{-(1+x^2)y^2} dy dx = \int_{[0,\infty) \times [0,\infty)} f(y,x) d\lambda^2(y,x),$$

wobei  $f(y,x) = ye^{-(1+x^2)y^2} \geq 0$  auf  $[0,\infty) \times [0,\infty)$ . Mit dem Satz von Fubini erhalten wir

$$\int_0^\infty \left( \int_0^\infty ye^{-(1+x^2)y^2} dy \right) dx = \int_0^\infty \left( \int_0^\infty ye^{-(1+x^2)y^2} dx \right) dy.$$

Es sind (gemäß der Substitution  $xy \rightarrow t$ ,  $dx \rightarrow 1/y dt$ )

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2 y^2} dx ye^{-y^2} dy &= \int_0^\infty \frac{1}{y} \int_0^\infty e^{-t^2} dt ye^{-y^2} dy \\ &= \int_0^\infty e^{-t^2} dt \int_0^\infty e^{-y^2} dy \\ &= \left( \int_0^\infty e^{-x^2} dx \right)^2, \end{aligned}$$

und

$$\int_0^\infty \left( \int_0^\infty ye^{-(1+x^2)y^2} dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \arctan(x) \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{4}.$$

Somit erhalten wir

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

## 6. Bildmaße und Transformationsformel

**Motivatiion 6.1:** Für die Integration in  $\mathbb{R}$  haben wir die Substitutionsregel:

$$\int_a^b f(g(t))g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx$$

In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, ob es ein allgemeines Analogon zu dieser Situation gibt. Zunächst betrachten wir eine abstrakte Version dazu.

**Satz 6.2 (und Definition):** Seien  $(X, \mathfrak{A})$ ,  $(Y, \mathfrak{M})$  zwei messbare Räume und  $T : X \rightarrow Y$  eine messbare Abbildung. Für ein Maß  $\mu$  auf  $\mathfrak{A}$  definieren wir eine Abbildung  $T(\mu)$  durch

$$T(\mu)(A) := \mu(T^{-1}(A))$$

für  $A \in \mathfrak{M}$ . Dann ist  $T(\mu)$  ein Maß auf  $\mathfrak{M}$ , das sogenannte Bildmaß von  $\mu$  bzgl.  $T$ .

**Beweis:** Es gilt

$$T(\mu)(\emptyset) = \mu(T^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0.$$

Seien nun  $A_i \in \mathfrak{M}$  paarweise disjunkt, dann ist

$$\begin{aligned} T(\mu)\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right) &= \mu\left(T^{-1}\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i\right)\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} T^{-1}(A_i)\right) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(T^{-1}(A_i)) = \sum_{i \in \mathbb{N}} T(\mu)(A_i), \end{aligned}$$

also ist  $T(\mu)$  tatsächlich ein Maß auf  $\mathfrak{M}$ . ■

**Satz 6.3:** Seien  $(X, \mathfrak{A})$ ,  $(Y, \mathfrak{M})$  zwei messbare Räume,  $T : X \rightarrow Y$  messbar,  $\mu$  ein Maß auf  $\mathfrak{A}$  und  $T(\mu)$  das Bildmaß von  $\mu$  bzgl.  $T$ . Sei weiter  $f : Y \rightarrow \mathbb{C}$  messbar, dann sind äquivalent:

- (1)  $f : Y \rightarrow \mathbb{C}$  ist integrierbar bzgl.  $T(\mu)$ ,
- (2)  $f \circ T : X \rightarrow \mathbb{C}$  ist integrierbar bzgl.  $\mu$ .

In diesem Fall gilt

$$\int_Y f(y) dT(\mu)(y) = \int_X f(T(x)) d\mu(x).$$

**Beweis:** Übungsaufgabe. ■

**Bemerkung 6.4:** Der Satz 6.3 erlaubt es, das Integral  $\int_X f(T(x)) d\mu(x)$  durch die Substitution  $y = T(x)$  auf ein „einfacheres“ Integral zurückzuführen, allerdings bzgl. des Bildmaßes  $T(\mu)$ . Solange wir letzteres nicht kennen, ist die Substitution nicht besonders hilfreich. Im Fall  $X = Y = \mathbb{R}^n$  und  $\mu = \lambda^n$  können wir  $T(\lambda^n)$  mit Hilfe einer sogenannten Dichte wieder durch  $\lambda^n$  ausdrücken.

**Definition 6.5:** Seien  $\mu, \nu$  zwei Maße auf einer  $\sigma$ -Algebra  $\mathfrak{A}$  auf  $X$ , des Weiteren sei  $h : X \rightarrow [0, \infty]$  messbar. Falls

$$\nu(E) = \int_E h d\mu$$

für alle  $E \in \mathfrak{A}$  gilt, dann sagen wir:  $\nu$  hat die Dichte  $h$  bzgl.  $\mu$ . Übliche Bezeichnungen dafür sind  $d\nu = h d\mu$  oder  $h = \frac{d\nu}{d\mu}$ .

**Bemerkung 6.6:** (1) Die Dichte  $h$  ist fast sicher eindeutig bestimmt: Gilt

$$\int_E h_1 d\mu = \int_E h_2 d\mu$$

für alle  $E \in \mathfrak{A}$ , so ist  $h_1 = h_2$   $\mu$ -fast sicher.

- (2) Die Dichte  $h$  muss selbst nicht bzgl.  $\mu$  integrierbar sein. Es gilt  $h \in L^1(\mu)$  genau dann, wenn  $\nu(X) = \int_X h d\mu < \infty$ , also wenn  $\nu$  ein endliches Maß ist.
- (3) Wann ein Maß  $\nu$  eine Dichte bzgl. eines anderen Maßes  $\mu$  hat, wird durch den Satz von Radon-Nikodym beantwortet.

**Satz 6.7:** Sei  $d\nu = h d\mu$ . Dann gilt für messbares  $f \geq 0$

$$\int f d\nu = \int fh d\mu. \quad (\text{I.4})$$

Weiterhin, für allgemeines messbares  $f$  gilt die Äquivalenz

$$f \in L^1(\nu) \Leftrightarrow fh \in L^1(\mu),$$

und dann gilt auch Gl. (I.4).

**Beweis:** Die Aussage wird gezeigt mit der üblichen Vorgehensweise: für  $f = 1_E$  ist Gl. (I.4) die Definition 6.5, der Rest folgt mit Linearkombinationen und Approximation gemäß monotoner Konvergenz. ■

**Motivation 6.8:** Im Folgenden wollen wir Funktionen  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  betrachten. Dabei wollen wir uns überlegen, wann das Bildmaß  $T(\lambda^n)$  eine Dichte bzgl.  $\lambda^n$  hat, d. h. unter welchen Voraussetzungen die Gleichheit

$$\lambda^n(T^{-1}(A)) = (T(\lambda^n))(A) = \int_A h d\lambda^n$$

gilt. Notwendige Bedingung für die Gleichheit ist, dass  $T$  Mengen  $A$  mit  $\lambda^n(A) \neq 0$  nicht auf Nullmengen abbildet, d. h.  $T$  sollte also invertierbar und „hinreichend regulär“ sein. Im Folgenden werden wir  $T$  durch  $T^{-1}$  ersetzen, wir betrachten dann  $\lambda^n(T(A))$ .

Zunächst betrachten wir eine lineare Funktion  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ( $T$  entspricht somit also einer Matrix), in diesem Fall hat  $\lambda^n \circ T$  konstante Dichte.

**Satz 6.9:** Sei  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine lineare invertierbare Abbildung. Dann gilt

$$\lambda^n(T(A)) = |\det(T)|\lambda^n(A)$$

für alle  $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ . Insbesondere gilt

$$\text{vol}(T([0, 1]^n)) = |\det(T)|.$$

Mit dem Bildmaß ausgedrückt gilt

$$T(\lambda^n) = \frac{1}{|\det(T)|}\lambda^n.$$

Beachte: da  $T$  invertierbar ist, gilt  $\det(T) \neq 0$ .

**Beweis:** Wir müssen zeigen, dass die beiden Maße

$$\mu_1(A) := \lambda^n(T(A)) \quad \text{und} \quad \mu_2 := |\det(T)|\lambda^n(A)$$

auf  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$  übereinstimmen. Mit dem Eindeutigkeitssatz genügt es, die Behauptung auf den entsprechenden erzeugenden Elementen zu überprüfen, d. h. es genügt zu zeigen, dass  $\mu_1 = \mu_2$  auf Quadern gilt. Wegen der Stetigkeit des Maßes reicht es, die Behauptung für Quader mit rationalen Seitenlängen zu zeigen. Weiter genügt es, wegen der Translationsinvarianz des Lebesguemaß und der Möglichkeit, Quader zu „zerschneiden“, Quader der Form  $[0, c]^n$  zu betrachten. Insgesamt also genügt es, die Gleichheit

$$\lambda^n(T[0, c]^n) = |\det(T)|\lambda^n([0, c]^n) = |\det(T)|c^n$$

zu zeigen. Weiterhin können wir jedes  $T$  folgendermaßen diagonalisieren:

$$TT^* = VD^2V^*$$

mit  $V \in O(\mathbb{R}^n)$ ,  $D$  Diagonalmatrix mit den positiven Eigenwerten von  $TT^*$  auf der Diagonalen. Damit ist  $T = VDW$  mit  $W := D^{-1}V^*T$  und

$$WW^* = D^{-1}V^*TT^*VD^{-1} = E_n,$$

d. h. auch  $W \in O(\mathbb{R}^n)$ . (Beachte: da  $T$  invertierbar ist, hat  $TT^*$  nur von 0 verschiedene Eigenwerte, d. h.  $D^{-1}$  existiert.)

Da  $|\det(VDW)| = |\det(V)| \cdot |\det(D)| \cdot |\det(W)|$  genügt es, den Satz zu zeigen für  $T = V \in O(\mathbb{R}^n)$  oder für  $T = D$  eine Diagonalmatrix.

Sei  $T = V$  orthogonal. Dann ist zu zeigen:  $\lambda^n(V[0, c]^n) = |\det(V)| \cdot \lambda^n([0, c]^n)$ . Wegen der Invarianz des Lebesguemaßes unter Drehungen gilt die Gleichheit  $\lambda^n(V[0, c]^n) = \lambda^n([0, c]^n)$ . Wegen  $|\det(V)| = 1$  für orthogonale Matrizen gilt der Satz also für orthogonale Matrizen.

Sei nun  $T = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  Diagonalmatrix. Dann ist  $T([0, c]^n) = \prod_{i=1}^n [0, d_i c]$  und

$$\lambda^n(T([0, c]^n)) = |d_1 \cdot d_2 \cdots d_n|c^n = |\det(T)|\lambda^n([0, c]^n),$$

also gilt der Satz auch für Diagonalmatrizen  $T$ . ■

**Satz 6.10 (Transformationsatz):** Seien  $V, W \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $T : V \rightarrow W$  eine bijektive stetig differenzierbare Abbildung, so dass  $T'(x) = DT(x)$  invertierbar ist für alle  $x \in V$ . Dann ist für jede Borelmenge  $A \subset V$  auch  $T(A) \subset W$  eine Borelmenge und es gilt

$$\lambda^n(T(A)) = \int_A |\det(T'(x))| d\lambda^n(x). \quad (\text{I.5})$$

Somit gilt für jede integrierbare Funktion  $f : W \rightarrow \mathbb{C}$  auch

$$\int_W f(y) d\lambda^n(y) = \int_V f(T(x)) |\det(T'(x))| d\lambda^n(x), \quad (\text{I.6})$$

d. h.

$$\frac{dT(\lambda^n)}{d\lambda^n}(x) = \frac{1}{|\det(T'(x))|}.$$

**Beweis:** Nach dem Satz über die lokale Umkehrfunktion ist  $T^{-1}$  stetig differenzierbar und es gilt

$$(T^{-1})'(y) = (T'(x))^{-1}, \quad \text{wobei } x = T^{-1}(y),$$

d. h.

$$|\det(T^{-1})'(y)| = \frac{1}{|\det T'(x)|},$$

also ist insbesondere  $T^{-1}$  stetig. Ist  $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ , dann ist  $T(A) = (T^{-1})^{-1}(A) \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ , da  $T^{-1}$  stetig, also insbesondere messbar ist.

Gl. (I.6) folgt aus Gl. (I.5) mit Satz 6.7 angewendet auf  $T^{-1}$ . Es reicht, Gl. (I.5) mit „ $\leq$ “ zu zeigen, die Anwendung auf  $T^{-1}$  gibt dann „ $\geq$ “. Wir müssen also zeigen, dass

$$\lambda^n(T(A)) \leq \int_A |\det(T'(x))| d\lambda^n(x)$$

für alle  $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$  gilt – es reicht wiederum, diese Aussage für Quader zu zeigen, und zwar für solche, für die  $\bar{A} \subset V$  gilt. Sei  $A$  ein solcher Quader, zerlege  $A$  in viele kleine Quader  $Q_i$ , und wähle in jedem einzelnen Quader  $Q_i$  einen Punkt  $x_i$  und approximiere  $T$  auf  $Q_i$  durch eine affine Abbildung  $\phi_i$  gemäß

$$\phi_i(z) = T(x_i) + T'(x_i)(z - x_i).$$

Das Problem, das sich nun stellt, ist die globale Kontrolle der Approximation.  $\|T'(x)^{-1}\|$  ist stetig in  $x$ , nimmt also ihr Supremum auf der kompakten Menge  $\bar{A}$  an, es gilt also  $\|T'(x)^{-1}\| \leq c \forall x \in \bar{A}$ . Sei nun  $\varepsilon > 0$ . Da  $T$  stetig differenzierbar ist, ist  $\|T'(x)\|$  gleichmäßig stetig auf der kompakten Menge  $\bar{A}$ , in Abhängigkeit des festen  $\varepsilon$  existiert also  $\delta > 0$ , so dass

- (1)  $\|T'(x) - T'(y)\| \leq \frac{\varepsilon}{c \cdot n}$ ,
- (2)  $|\det(T'(x)) - \det(T'(y))| \leq \varepsilon$

für  $x, y$  mit  $\|x - y\| < \delta$ . Zu (2): Da  $T'$  stetig ist, ist  $T'$  stetig in jedem Matrixeintrag und  $\det(T')$  ist ein Polynom in den Matrixeinträgen. Wähle nun die  $Q_i$  so klein, dass  $\|x - y\| \leq \delta$  für  $x, y \in Q_i$ . Wähle nun  $z \in Q_i$ , d. h.  $\|z - x_i\| \leq \delta$ . Dann gilt nach dem

## I. Integrationstheorie

Mittelwertsatz für Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  folgende Abschätzung (mit  $T = (T_1, \dots, T_n)$  und  $T_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ )

$$\begin{aligned} T(z) &= (T_1(z), T_2(z), \dots, T_n(z)) \\ &= (T_1 x_i + T_1'(\xi_1)(z - x_i), \dots, T_n(x_i) + T_n'(\xi_n)(z - x_i)) \end{aligned}$$

wobei die  $\xi_k$  Punkte auf der Strecke  $\overline{x_i z}$  sind. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} T(z) &= T(x_i) + T'(x_i)(z - x_i) + \begin{pmatrix} T_1'(\xi_1) - T_1'(x_i) \\ \vdots \\ T_n'(\xi_n) - T_n'(x_i) \end{pmatrix} (z - x_i) \\ &\leq \phi_i(z) + \sum_{k=1}^n \|T_k'(\xi_k) - T_k'(x_i)\| \|z - x_i\|, \end{aligned}$$

Da

$$\|T_k'(\xi_k) - T_k'(x_i)\| \leq \frac{\varepsilon}{c \cdot n}$$

haben wir also insgesamt

$$\|T(z) - \phi_i(z)\| \leq n \frac{\varepsilon}{c \cdot n} \|z - x_i\| \leq \frac{\varepsilon \cdot \delta}{c}.$$

Wir müssen auch  $T(Q_i)$  durch  $\phi_i$  kontrollieren. Es gilt für  $z \in Q_i$

$$\begin{aligned} \|\phi_i^{-1}(T(z)) - z\| &= \|\phi_i^{-1}(T(z)) - \phi_i^{-1}(\phi_i(z))\| \\ &\leq \underbrace{\|T'(x_i)^{-1}\|}_{\leq c} \cdot \underbrace{\|T(z) - \phi_i(z)\|}_{\leq \frac{\varepsilon \cdot \delta}{c}} \leq \varepsilon \cdot \delta, \end{aligned}$$

d. h.

$$\phi_i^{-1}(T(z)) \in Q_i^{+\varepsilon\delta} := \{y \mid \exists x \in Q_i : \|y - x\| \leq \varepsilon\delta\},$$

also  $T(z) \in \phi_i(Q_i^{+\varepsilon\delta})$  für alle  $z \in Q_i$ , d. h.  $T(Q_i) \subset \phi_i(Q_i^{+\varepsilon\delta})$ . Somit können wir nun abschätzen:

$$\begin{aligned} \lambda^n(T(Q_i)) &\leq \lambda^n(\phi_i(Q_i^{+\varepsilon\delta})) \\ &= |\det(T'(x_i))| \cdot \lambda^n(Q_i^{+\varepsilon\delta}) \\ &\leq |\det(T'(x_i))| \cdot (1 + \varepsilon)^n \cdot \lambda^n(Q_i) \\ &= (1 + \varepsilon)^n \int_{Q_i} |\det(T'(x_i))| d\lambda^n(x) \\ &\leq (1 + \varepsilon)^n \int_{Q_i} (|\det(T'(x))| + \varepsilon) d\lambda^n(x) \\ &= (1 + \varepsilon)^n \int_{Q_i} |\det T'(x)| d\lambda^n(x) + (1 + \varepsilon)^n \varepsilon \lambda^n(Q_i), \end{aligned}$$

also insgesamt

$$\lambda^n(T(A)) \leq (1 + \varepsilon)^n \int_A |\det(T'(x))| d\lambda^n(x) + (1 + \varepsilon)^n \varepsilon \lambda^n(A),$$

Mit  $\varepsilon \rightarrow 0$  folgt dann die Behauptung. ■

**Beispiel 6.11 (Polarkoordinaten in der Ebene):** Seien

$$V := \{(r, \vartheta) \mid r > 0, 0 < \vartheta < 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2, \quad W := \mathbb{R}^2 \setminus \{(r, 0) \mid r \geq 0\},$$

dann erfüllt die Abbildung

$$T : V \longrightarrow W; (r, \vartheta) \longmapsto (r \cos(\vartheta), r \sin(\vartheta))$$

die Voraussetzungen für den Transformationssatz. Die Jacobimatrix der Transformation ist

$$T'(r, \vartheta) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -r \sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & r \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

und die Jacobideterminante ist

$$\det(T'(r, \vartheta)) = r \cos^2(\vartheta) + r \sin^2(\vartheta) = r.$$

Nach dem Transformationssatz ist jetzt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_W f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(r \cos(\vartheta), r \sin(\vartheta)) r dr d\vartheta;$$

die erste Gleichung gilt, da  $\lambda^2(W^c) = 0$ . Nun benutzen wir den Transformationssatz, um wieder  $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx$  auszurechnen (vergleiche [Beispiel 5.11](#)):

$$\left( \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r e^{-r^2} dr d\vartheta = \pi,$$

also

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

## 7. $L^p$ -Räume

Im Folgenden sei  $(X, \mathfrak{A}, \mu)$  ein Maßraum.

**Bezeichnung 7.1:** (1) Für  $0 < p < \infty$  definieren wir für eine messbare Funktion  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  die  $L^p$ -Norm

$$\|f\|_p := \left( \int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

und setzen

$$L^p(\mu) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ messbar, } \|f\|_p < \infty\}.$$

(2) Für  $p = \infty$  setzen wir

$$\|f\|_\infty := \text{ess sup}_{x \in X} |f(x)| = \inf\{k \in \mathbb{R} \mid \mu(\{x \mid f(x) > k\}) = 0\},$$

wobei wir  $\|f\|_\infty := \infty$  setzen, falls kein solches  $k \in \mathbb{R}$  existiert.  $\text{ess sup}$  steht für „essentielles Supremum“. Weiter setzen wir

$$L^\infty(\mu) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ messbar und } \|f\|_\infty < \infty\}.$$

**Bemerkung 7.2:** (1) Eine Norm auf einem  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $V$  hat die Eigenschaften

- (i)  $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$  für alle  $\alpha \in \mathbb{C}, f \in V$ ,
- (ii)  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$  für alle  $f, g \in V$ ,
- (iii)  $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ .

Die  $L^p$ -Normen erfüllen

- (i)  $\|\alpha f\|_p^p = \int_X |\alpha f(x)|^p d\mu(x) = |\alpha|^p \int_X |f(x)|^p d\mu(x) = |\alpha|^p \|f\|_p^p$ ,
- (ii) siehe dazu [Satz 7.3](#),

aber im Allgemeinen nicht (iii), denn nach Definition gilt  $\|f\|_p = 0$  genau dann, wenn  $\int_X |f(x)|^p d\mu(x) = 0$ , also genau dann, wenn  $|f(x)|^p = 0$  fast überall gilt, also genau dann, wenn  $f(x) = 0$  fast überall gilt. Die  $L^p$ -Normen auf dem Raum der Funktionen sind nur Halbnormen. Um dieses Problem zu beheben, identifizieren wir  $f$  und  $g$ , falls  $f = g$  fast überall gilt.

Wir setzen  $\mathcal{L}^p := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ messbar, } \|f\|_p < \infty\}$  und definieren die Äquivalenzrelation

$$f \sim g :\Leftrightarrow f = g \text{ f. ü..}$$

Sei  $N := \{f \mid f \text{ messbar und } f = 0 \text{ f. ü.}\}$ .  $N$  ist ein Untervektorraum von  $\mathcal{L}^p$  und wir setzen  $L^p := \mathcal{L}^p/N$  als Menge der Äquivalenzrelationen mit der Quotientenabbildung

$$\pi : \mathcal{L}^p \longrightarrow L^p, f \longmapsto [f].$$



Es ist leicht zu sehen, dass die Festsetzungen

$$\begin{aligned} [\alpha f] &:= \alpha[f] \\ [f + g] &:= [f] + [g] \\ \|[f]\|_p &:= \|f\|_p \end{aligned}$$

wohldefinierte Verknüpfungen auf  $L^p$  liefern, welche nicht vom gewählten Repräsentanten abhängen. Damit wird  $L^p$  zum normierten Vektorraum. Üblicherweise ignoriert man dann die Unterscheidung zwischen  $\mathcal{L}^p$  und  $L^p$  und redet von Funktionen in  $L^p$ , wobei diese auf Nullmengen beliebig abgeändert werden dürfen.

- (2) Die Definition von  $\|\cdot\|_p$  für  $p = \infty$  ist konsistent im folgenden Sinne: Falls  $f \in \bigcap_{1 \leq p < \infty} L^p$ , dann gilt

$$\|f\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|f\|_p.$$

- (3) Die  $\ell_p$ -Räume aus der Analysis I sind hier als Spezialfall der  $L^p$ -Räume enthalten, wenn  $X = \mathbb{N}$ ,  $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\mathbb{N})$  und  $\mu$  das Zählmaß ist. Eine Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  entspricht einer Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n := f(n)$ , alle solchen  $f$  sind messbar und es ist

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n).$$

Mit den eingeführten Bezeichnungen ist dann also

$$L^p(\mu) = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\} =: \ell_p.$$

**Satz 7.3 (Minkowski-Ungleichung):** Seien  $1 \leq p \leq \infty$  und  $f, g \in L^p(\mu)$ . Dann ist auch  $f + g \in L^p(\mu)$  und es gilt

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

**Beweis:** Die Fälle  $p = 1$  und  $p = \infty$  sind trivial, im Folgenden betrachten wir also  $1 < p < \infty$ . Wir setzen  $\|\cdot\| := \|\cdot\|_p$ . Ohne Einschränkung seien  $\|f\| \neq 0 \neq \|g\|$  (ansonsten ist die Aussage klar). Wir haben dann

$$\begin{aligned} \|f + g\|^p &= \int_X |f(x) + g(x)|^p \, d\mu(x) \\ &\leq \int_X (|f(x)| + |g(x)|)^p \, d\mu(x) \\ &= \int_X \left( \left( \frac{\|f\|}{\|f\| + \|g\|} \cdot \frac{|f(x)|}{\|f\|} + \frac{\|g\|}{\|f\| + \|g\|} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|} \right) (\|f\| + \|g\|) \right)^p \, d\mu(x) \\ &\leq \int_X (\|f\| + \|g\|)^p \left( \frac{\|f\|}{\|f\| + \|g\|} \left( \frac{|f(x)|}{\|f\|} \right)^p + \frac{\|g\|}{\|f\| + \|g\|} \left( \frac{|g(x)|}{\|g\|} \right)^p \right) \, d\mu(x). \end{aligned}$$

## I. Integrationstheorie

Die letzte Abschätzung gilt wegen der Konvexität von  $t \mapsto f(t) := t^p$  auf  $[0, \infty)$  für  $p \geq 1$ , d. h.

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

für alle  $\alpha, \beta \geq 0$  mit  $\alpha + \beta = 1$ . Insgesamt haben wir also

$$\begin{aligned} \|f + g\|^p &\leq (\|f\| + \|g\|)^p \left[ \frac{\|f\|}{\|f\| + \|g\|} \frac{\int_X |f(x)|^p d\mu(x)}{\|f\|^p} + \frac{\|g\|}{\|f\| + \|g\|} \frac{\int_X |g(x)|^p d\mu(x)}{\|g\|^p} \right] \\ &= (\|f\| + \|g\|)^p, \end{aligned}$$

mit der Monotonie der Wurzel also die Behauptung. ■

**Bemerkung 7.4:** Für  $0 < p < 1$  ist  $t \mapsto t^p$  konkav auf  $[0, \infty)$  und dann gilt

$$\| |f| + |g| \| \geq \|f\|_p + \|g\|_p,$$

d. h.  $\|\cdot\|_p$  ist für  $0 < p < 1$  keine Norm. Man kann zeigen, dass gilt

$$\|f + g\|^p \leq \|f\|^p + \|g\|^p$$

für  $0 < p < 1$ . Dies zeigt, dass  $L^p$  auch für  $0 < p < 1$  ein Vektorraum ist und

$$d(f, g) = \|f - g\|_p^p = \int_X |f - g|^p d\mu$$

liefert eine Metrik auf  $L^p$ .

**Definition 7.5:** Seien  $\mathbb{R} \ni p, q > 1$ . Falls für  $p, q$  gilt

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q},$$

so nennen wir  $p, q$  *konjugierte Exponenten*. Wir schließen dabei auch den Fall  $p = 1$ ,  $q = \infty$  ein.

**Bemerkung 7.6:** (1) Der Fall  $p = q = 2$  ist ein interessanter Spezialfall.

(2) Seien  $p, q$  konjugierte Exponenten und  $a, b \geq 0$ . Dann gilt

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

Schreibe dazu  $a = \exp(s/p)$ ,  $b = \exp(t/q)$ . Dann ist wegen der Konvexität von  $t \mapsto e^t$

$$ab = \exp\left(\frac{1}{p}s + \frac{1}{q}t\right) \leq \frac{1}{p} \exp(s) + \frac{1}{q} \exp(t) = \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

**Satz 7.7 (Hölder'sche Ungleichung):** Seien  $p, q$  konjugierte Exponenten, ferner seien  $f \in L^p(\mu)$ ,  $g \in L^q(\mu)$ . Dann ist  $fg \in L^1(\mu)$  und es gilt

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

**Beweis:** Für den Spezialfall  $p = 1$ ,  $q = \infty$  haben wir (da  $|g| \leq \|g\|_\infty$  f. ü.)

$$\int_X |fg| d\mu \leq \int_X |f| \cdot \|g\|_\infty d\mu = \|g\|_\infty \int_X |f| d\mu = \|g\|_\infty \|f\|_1.$$

Seien nun  $1 < p, q < \infty$ . Weiter seien  $\|f\|_p \neq 0 \neq \|g\|_q$ , sonst gilt die Ungleichung trivialerweise. Setze

$$\hat{f}(t) := \frac{f(t)}{\|f\|_p}, \quad \hat{g}(t) := \frac{g(t)}{\|g\|_q},$$

dann gilt für die Normen der Hilfsfunktionen  $\|\hat{f}\|_p = 1 = \|\hat{g}\|_q$  und die zu beweisende Behauptung ist äquivalent zu  $\|\hat{f} \cdot \hat{g}\|_1 \leq 1$ . Dies folgt nun aus **Bemerkung 7.6 (2)**

$$\begin{aligned} \|\hat{f} \cdot \hat{g}\|_1 &= \int_X |\hat{f}(t)| \cdot |\hat{g}(t)| d\mu(t) \\ &\leq \int_X \left( \frac{1}{p} |\hat{f}(t)|^p + \frac{1}{q} |\hat{g}(t)|^q \right) d\mu(t) \\ &= \frac{1}{p} \int_X |\hat{f}(t)|^p d\mu(t) + \frac{1}{q} \int_X |\hat{g}(t)|^q d\mu(t) \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= 1. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**Bemerkung 7.8:** (1) Der Fall  $p = q = 2$ ,

$$\int |f| \cdot |g| d\mu \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2,$$

ist die Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung für den Hilbertraum  $L^2(\mu)$ .

(2) Auch für die  $\ell_p$ -Räume gilt die Hölder'sche Ungleichung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

**Satz 7.9 (Fischer-Riesz):** Die normierten Vektorräume  $L^p(\mu)$  sind für  $1 \leq p \leq \infty$  vollständig, also Banachräume.

**Beweis:** Wir betrachten ausschließlich den Fall  $1 \leq p < \infty$ , der Fall  $p = \infty$  ist einfacher. Sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Cauchyfolge in  $L^p(\mu)$ . Dann gibt es für alle  $i \in \mathbb{N}$  ein  $n(i)$ , so dass  $\|f_n - f_m\|_p < 2^{-i}$  für alle  $m, n \geq n(i)$  gilt. Ohne Einschränkung können wir die  $n(i)$  aufsteigend wählen, d.h.  $n(1) < n(2) < \dots$ , dann gilt

$$\|f_{n(i+1)} - f_{n(i)}\|_p < 2^{-i}$$

für alle  $i$ . Wir möchten den Grenzwert  $f$  unserer Folge gern folgendermaßen definieren:

$$f(x) := f_{n(1)}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{n(i+1)}(x) - f_{n(i)}(x)). \quad (\text{I.7})$$

## I. Integrationstheorie

Ergibt das Sinn? Um das zu sehen, setzen wir

$$g_k(x) := \sum_{i=1}^k |f_{n(i+1)}(x) - f_{n(i)}(x)|,$$

$$g(x) := \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n(i+1)}(x) - f_{n(i)}(x)|,$$

also  $g(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} g_k(x) \forall x$ . Die Minkowski'sche Ungleichung [Satz 7.3](#) liefert

$$\|g_k\|_p \leq \sum_{i=1}^k \|f_{n(i+1)} - f_{n(i)}\|_p < \sum_{i=1}^k 2^{-i} < 1$$

für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Somit gilt mit Hilfe von Fatou

$$\begin{aligned} \|g\|_p^p &= \int_X |g(x)|^p d\mu(x) \\ &= \int_X \lim_{k \rightarrow \infty} |g_k(x)|^p d\mu(x) \\ &\stackrel{1.26}{\leq} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X |g_k(x)|^p d\mu(x) \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \|g_k\|_p^p \\ &= 1. \end{aligned}$$

Damit ist  $g < \infty$  fast überall und  $f$  ist fast überall durch [Gl. \(1.7\)](#) definiert. Wir setzen  $f(x) = 0$  auf der verbleibenden Nullmenge.

Wegen

$$f_{n(k)}(x) = f_{n(1)}(x) + \sum_{i=1}^{k-1} (f_{n(i+1)}(x) - f_{n(i)}(x)) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x) \text{ fast überall}$$

gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n(k)}(x) = f(x) \quad \text{fast überall.}$$

Es bleibt zu zeigen, dass  $f \in L^p(\mu)$  gilt und dass tatsächlich  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p(\mu)$  gilt.

Sei  $\varepsilon > 0$ , dann existiert ein  $N(\varepsilon)$ , so dass  $\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$  für alle  $n, m \geq N(\varepsilon)$ . Fixiere ein  $m \geq N(\varepsilon)$ , wähle  $n = n(i)$  für hinreichend großes  $i$  und beachte

$$f_{n(i)} - f_m \rightarrow f - f_m \quad \text{für } i \rightarrow \infty \text{ punktweise fast überall.}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f - f_m\|_p^p &= \int_X |f(x) - f_m(x)|^p d\mu(x) \\ &= \int_X \lim_{i \rightarrow \infty} |f_{n(i)}(x) - f_m(x)|^p d\mu(x) \\ &\stackrel{1.26}{\leq} \liminf_{i \rightarrow \infty} \int_X |f_{n(i)}(x) - f_m(x)|^p d\mu(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \liminf_{i \rightarrow \infty} \|f_{n(i)} - f_m\|_p^p \\
&\leq \varepsilon^p,
\end{aligned}$$

damit also  $\|f - f_m\|_p \leq \varepsilon$  für alle  $m \geq N(\varepsilon)$ . Es gilt

$$\begin{aligned}
\|f\|_p &= \|f_m + (f - f_m)\|_p \\
&\leq \|f_m\|_p + \|f - f_m\|_p \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

also gilt  $f \in L^p(\mu)$ . Außerdem gilt  $\|f - f_m\|_p \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ , da nach oben  $\|f - f_m\|_p \leq \varepsilon$  für hinreichend großes  $m$ . ■

Im Beweis des Satzes von Fischer-Riesz haben wir außerdem gezeigt, dass gilt:

**Satz 7.10:** Sei  $1 \leq p \leq \infty$  und es konvergiere  $f_n \rightarrow f$  in  $L^p(\mu)$  bzgl.  $\|\cdot\|_p$ . Dann gibt es eine Teilfolge  $(f_{n(i)})_{i \in \mathbb{N}}$ , die fast überall punktweise gegen  $f$  konvergiert.

**Bemerkung 7.11:** Ohne Übergang zu einer Teilfolge ist der [Satz 7.10](#) im Allgemeinen falsch.

**Korollar 7.12:** Der Banachraum  $L^2(\mu)$  ist, versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu(x),$$

ein Hilbertraum.

# II. Vektoranalysis

## 8. Vektoranalysis: Die klassischen Sätze von Gauß und Stokes

**Motivation 8.1:** Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sagt aus

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a) \quad (\text{II.1})$$

für stetig differenzierbares  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . In diesem Kapitel wollen wir uns mit der Frage beschäftigen, ob es höherdimensionale Analoga zu Gl. (II.1) gibt. Es wird sich zeigen, dass es solche Analoga gibt, falls wir Gl. (II.1) korrekt interpretieren. Schreibe  $I = [a, b]$ , nenne  $\partial I = \{a, b\}$  den Rand von  $I$ . Dann ist

$$F(b) - F(a) = \int_{\partial I} F,$$

wobei die Vorzeichen der Orientierung des Randes entsprechen. Also sagt Gl. (II.1)

$$\int_I F' = \int_I \partial F = \int_{\partial I} F,$$

also: das Integral über ein „Gebiet“ der Ableitung einer Funktion ist das gleiche wie das Integral über den Rand des Gebietes der Funktion. Dies gilt auch im Höherdimensionalen, aber  $\partial$  muss richtig interpretiert werden.

**Beispiel 8.2 (Satz von Gauß):** Sei  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (also  $F = (F_1, \dots, F_n)$ ) mit  $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ein „Vektorfeld“. Betrachte die *Divergenz* von  $F$ :

$$\text{div}(F) := \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i},$$

also  $\text{div}(F) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Was ist  $\int_M \text{div}(F) dx_1 \cdots dx_n$  über eine  $n$ -dimensionale Menge  $M \subset \mathbb{R}^n$ ? Betrachte den Spezialfall  $n = 2$ , weiter sei  $M = Q$  ein Rechteck mit  $Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ . Dann gilt

$$\iint_Q \frac{\partial F_1}{\partial x_1} dx_1 dx_2 = \int_{a_2}^{b_2} \underbrace{F_1(b_1, x_2)}_{\langle F, e_1 \rangle(b_1, x_2)} - \underbrace{F_1(a_1, x_2)}_{\langle F, -e_1 \rangle(a_1, x_2)} dx_2 = \int_{\substack{\text{Vertikaler Rand} \\ \text{von } Q}} \langle F, \vec{n} \rangle dx_2,$$

wobei  $\vec{n}$  der Normalenvektor auf dem Rand sein soll, genau so

$$\iint_Q \frac{\partial F_2}{\partial x_2} dx_2 dx_1 = \int \underbrace{F_2(x_1, b_2)}_{\langle F, e_2 \rangle(x_1, b_2)} - \underbrace{F_2(x_1, a_2)}_{\langle F, -e_2 \rangle(x_1, a_2)} dx_1 = \int_{\substack{\text{Horizontaler Rand} \\ \text{von } Q}} \langle F, \vec{n} \rangle dx_1,$$

wobei  $\vec{n}$  wieder der Normalenvektor auf dem Rand sein soll. Insgesamt also

$$\iint_Q \operatorname{div}(F) dV = \int_{\partial Q} \langle F, \vec{n} \rangle dS,$$

das Integral links nennen wir Volumenintegral, das Integral rechts nennen wir Oberflächenintegral und  $\vec{n}$  das Normalenvektorfeld auf dem Rand  $\partial Q$ .

**Satz (von Gauß):** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  „hinreichend schön“ und  $F : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dann gilt

$$\int_M \operatorname{div}(F) dV = \int_{\partial M} \langle F, \vec{n} \rangle dS.$$

Das Integral links nennen wir Volumenintegral bzgl. des  $n$ -dimensionalen Lebesgue-Maßes, das Integral rechts nennen wir Oberflächenintegral bzgl. des  $(n-1)$ -dimensionalen Lebesgue-Maßes auf  $\partial M$ .

**Beispiel 8.3:** (1) Sei  $F(x) = x$ , das heißt  $F_i(x_1, \dots, x_n) = x_i$ , also

$$\operatorname{div}(F) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} x_i = n.$$

Dann sagt der Satz von Gauß

$$\int_M n dV = \int_{\partial M} \langle x, \vec{n} \rangle dS,$$

also

$$n \lambda^n(M) = \int_{\partial M} \langle x, \vec{n} \rangle dS.$$

(2) Betrachte  $M = \overline{B(0, r)}$ , dann ist  $\partial M = \mathbb{S}^{n-1}$ , also  $\langle x, \vec{n} \rangle = \|x\| \|\vec{n}\| = r$ .  
Damit ist

$$\int_{\partial M} \langle x, \vec{n} \rangle dS = r \lambda^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}),$$

in diesem Spezialfall liefert der Gauß'sche Integralsatz also die Beziehung

$$\lambda^n(\overline{B(0, r)}) = \frac{r}{n} \cdot \lambda^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}).$$

**Beispiel 8.4 (physikalische Interpretation):** (1) Das Vektorfeld  $F$  entspreche einem Geschwindigkeitsfeld einer inkompressiblen Flüssigkeit. Die Divergenz von  $F$  entspricht Quellen bzw. Senken des Feldes, d. h. Orte wo Teilchen erzeugt oder vernichtet werden. Dann bedeutet

$$\int_M \operatorname{div}(F) dV = \int_{\partial M} \langle F, \vec{n} \rangle dS,$$

dass die Gesamtmenge von erzeugten- und vernichteten Teilchen (links) dem Zu- und Abfluss durch den Rand von  $M$  (in Normalenrichtung) entspricht (rechts).

## II. Vektoranalysis

- (2) In der Elektrostatik entspricht  $F$  dem elektrischen Feld  $E$ . Nach der Maxwellgleichung gilt  $\operatorname{div}(E) = \rho$ , wobei  $\rho$  die Ladungsdichte sein soll. Dann bedeutet

$$\int_M \operatorname{div}(E) dV = \int_{\partial M} \langle E, \vec{n} \rangle dS,$$

dass die Gesamtladung in  $M$  (links) dem Fluss des elektrischen Felds durch den Rand von  $M$  (in Normalenrichtung) entspricht.

**Beispiel 8.5 (Satz von Stokes):** Für  $n = 3$  gibt es für ein Vektorfeld  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  (mit  $F = (F_1, F_2, F_3)$ ) eine weitere wichtige Ableitungsoperation, nämlich die *Rotation*

$$\operatorname{rot}(F) := \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right).$$

Die Rotation  $\operatorname{rot}(F) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist auch ein Vektorfeld. Es gibt eine interessante Umformulierung von  $\int_M \operatorname{rot}(F) dV$ , aber nur, wenn über ein zweidimensionales  $M$  integriert wird. Sei nun wieder  $M = Q$  ein Rechteck eingebettet in die  $x_1$ - $x_2$ -Ebene in  $\mathbb{R}^3$ . Dann ist

$$\begin{aligned} & \int_Q \langle \operatorname{rot}(F), dS \rangle \\ &= \iint (\operatorname{rot}(F))_3 dx_1 dx_2 \\ &= \iint \left( \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \\ &= \int (F_2(b_1, x_1) - F_2(a_1, x_2)) dx_2 - \int (F_1(x_1, b_2) - F_1(x_2, a_2)) dx_1 \end{aligned}$$

wobei  $S$  der Normalenvektor auf  $Q$  sein soll, der also in  $x_3$ -Richtung zeigt. Die letzte Gleichung sind dabei die Integrale in Tangentialrichtung über den Rand von  $Q$ , also

$$= \int_{\partial Q} \langle F, \tau \rangle dS,$$

wobei  $\tau$  das Einheitstangentenfeld des Randes sein soll.

**Satz (klassischer Satz von Stokes):** Sei  $n = 3$  und  $M \subset \mathbb{R}^3$  eine „hinreichend schöne“ zweidimensionale Fläche und  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $V$  offen,  $V \supset M$ . Dann gilt:

$$\int_M \langle \operatorname{rot}(F), dS \rangle = \int_{\partial M} \langle F, \tau \rangle ds,$$

wobei das Integral links das Oberflächenintegral über die Fläche  $M$  senkrecht zur Fläche  $M$  – und das Integral rechts das Kurvenintegral über die zur Randkurve tangentialen Kurve sein soll.



**Beispiel 8.6:** Sei  $M = \overline{B(0,1)}$  in der  $x_1$ - $x_2$ -Ebene mit Rand  $\partial M = \mathbb{S}^1$ .

- (1) Sei  $F(x) = x$ , also  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$  für alle  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ . Dann ist  $\text{rot}(F) = 0$ , also  $\int_M \langle \text{rot}(F), dS \rangle = 0$ . Weiter ist  $F$  senkrecht auf der Kreislinie, also ist  $\langle F, \tau \rangle = 0$  und  $\int_{\partial M} \langle F, \tau \rangle dS = 0$ .
- (2) Sei  $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, 2x_1x_2 + x_1, x_3)$ . Der Tangentialvektor  $\tau$  am Kreis zu  $(x_1, x_2)$  ist  $(-x_2, x_1)$ , also ist

$$\langle F, \tau \rangle = \langle (x_1^2, 2x_1x_2 + x_1, x_3), (-x_2, x_1, 0) \rangle = -x_1^2x_2 + 2x_1^2x_2 + x_1^2 = x_1^2x_2 + x_1^2.$$

Die Integration von  $ds$  über  $\mathbb{S}^1$  erledigt man am besten in Polarkoordinaten:  $x_1 = \sin(\varphi)$ ,  $x_2 = \cos(\varphi)$ . Dann ist das Integral

$$\int_{\partial M} \langle F, \tau \rangle ds = \int_0^{2\pi} (\sin^2(\varphi) \cos(\varphi) + \sin^2(\varphi)) d\varphi = \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi) d\varphi = \pi.$$

Für das zweite Integral brauchen wir die Rotation:

$$(\text{rot}(F))_3 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 2x_2 + 1 - 0,$$

also

$$\int_M \langle \text{rot}(F), dS \rangle = \int_{B(0,1)} (2x_2 + 1) dx_1 dx_2 = \int_{B(0,1)} 1 dx_1 dx_2 = \pi$$

**Bemerkung 8.7:** Das Vorangegangene führt auf Fragen

- (1) technischer Natur:
- (i) Welche Mengen, Flächen kommen als Integrationsbereiche in Frage?
  - (ii) Was ist der Rand  $\partial M$  einer solchen Fläche  $M$ ?
  - (iii) Wie können wir die Vorzeichen (die „Orientierung“) von Normalen und Tangenten zu Flächen konsistent festlegen?
  - (iv) Wie ist die Integration über  $M$ ,  $\partial M$  definiert?
- (2) konzeptioneller Natur:
- (i) Wie kann man den Satz von Stokes verallgemeinern auf Dimensionen  $n > 3$ ?
  - (ii) Sind die Sätze von Stokes und Gauß vielleicht nur Spezialfälle eines allgemeineren Satzes?

Die Beantwortung dieser Fragen wird auf den allgemeinen Satz von Stokes führen. Die Formulierung davon benötigt allerdings das Konzept von „Differentialformen“.

## 9. Differentialformen vom Grad 1 und Vektorfelder

Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Die Ableitung  $df(x)$  von  $f$  ist eine lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , die  $f$  in der Nähe von  $x$  am besten approximiert, also  $df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$ ,  $(\mathbb{R}^n)^*$  bezeichnet den Dualraum von  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 9.1:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Eine *Differentialform vom Grad 1* ist eine Abbildung von  $U$  in den Dualraum  $(\mathbb{R}^n)^*$  von  $\mathbb{R}^n$ . Wir nennen Differentialformen vom Grad 1 auch *Pfaff'sche Formen*.

**Bemerkung 9.2:** Seien  $x_1, \dots, x_n$  die Koordinatenfunktionen auf  $U$ , d. h.

$$\begin{aligned} x_i : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (z_1, \dots, z_n) &\longmapsto z_i, \end{aligned}$$

dann sind die  $dx_i = (\delta_{i,j})_{1 \leq j \leq n}$  die kanonischen Basisvektoren in  $(\mathbb{R}^n)^*$ , denn: sei  $e_j$  der  $j$ -te kanonische Basisvektor von  $\mathbb{R}^n$ , dann gilt  $dx_i(e_j) = \delta_{i,j}$ . Wir identifizieren  $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{n \times 1}$  und  $(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^{1 \times n}$ .

**Proposition 9.3:** Für jede Differentialform  $\omega$  vom Grad 1 auf  $U$  existieren eindeutig bestimmte Funktionen  $p_1, \dots, p_n : U \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$\omega(x) = \sum_{i=1}^n p_i(x) dx_i.$$

**Definition 9.4:** Eine Differentialform  $\omega$  vom Grad 1 auf  $U$  heißt messbar bzw. stetig bzw. differenzierbar, wenn alle  $p_i$  messbar bzw. stetig bzw. differenzierbar sind. Die Differentialform  $\omega$  hat kompakten Träger, wenn alle  $p_i$  kompakten Träger haben.

**Definition 9.5:** Seien  $\omega, \omega'$  Differentialformen vom Grad 1 auf  $U$  und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, so wird durch  $(\omega' + \omega)(x) := \omega(x) + \omega'(x)$  die Summe der beiden Differentialformen erklärt, genauso wird  $(f\omega)(x) := f(x)\omega(x)$  erklärt.

**Definition 9.6:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Unter einem *Vektorfeld* auf  $U$  verstehen wir eine Abbildung  $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Definition 9.7:** Sei  $e_1, \dots, e_n$  die kanonische Basis des  $\mathbb{R}^n$ . Für jedes Vektorfeld  $v$  auf  $U$  existieren eindeutig bestimmte Funktionen  $u_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass

$$v(x) = \sum_{i=1}^n u_i(x) e_i$$

für jedes  $x \in U$ .  $v$  heißt messbar bzw. stetig bzw. differenzierbar, falls alle  $u_i$  messbar bzw. stetig bzw. differenzierbar sind. Vektorfelder können addiert und mit Skalaren multipliziert werden. Für  $\alpha \in (\mathbb{R}^n)^*$  und  $w \in \mathbb{R}^n$  schreiben wir  $\langle \alpha, w \rangle := \alpha(w)$ . Ist  $\omega$  eine Differentialform vom Grad 1 und  $v$  ein Vektorfeld, so liefert das Skalarprodukt  $\langle \omega, v \rangle = \omega(v)$  eine Funktion mit Werten in  $\mathbb{R}$ .

## 10. Differentialformen höherer Ordnung

**Definition 10.1:** Sei  $E$  ein Vektorraum über  $\mathbb{R}$ . Eine *Multilinearform vom Grad  $p$*  (kurz:  *$p$ -Linearform*) ist eine Abbildung  $\alpha : \times_{i=1}^p E \rightarrow \mathbb{R}$ , die linear in jeder ihrer  $p$  Variablen ist. Eine  $p$ -Linearform  $\alpha$  heißt *alternierend* (oder *antisymmetrisch*), falls

$$\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_p) = -\alpha(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_p)$$

für alle  $i \neq j$  mit  $1 \leq i, j \leq p$ .

**Bemerkung 10.2:** Für jede alternierende  $p$ -Linearform  $\alpha$  und Permutation  $\pi$  von  $\{1, \dots, p\}$  gilt:

$$\alpha(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p)}) = \operatorname{sgn}(\pi)\alpha(v_1, \dots, v_p),$$

wobei  $\operatorname{sgn}$  das Signum einer Permutation bezeichnet, d.h.

$$\operatorname{sgn}(\pi) = \begin{cases} 1 & \pi \text{ ist Produkt einer geraden Anzahl von Transpositionen} \\ -1 & \pi \text{ ist Produkt einer ungeraden Anzahl von Transpositionen} \end{cases}.$$

**Satz 10.3:** Sei  $\alpha$  eine beliebige  $p$ -Linearform auf  $E$ . Setze

$$\beta(v_1, \dots, v_p) := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}),$$

wobei  $\mathfrak{S}_p$  die Menge der Permutationen von  $\{1, \dots, p\}$  ist. Dann gelten:

- (1)  $\beta$  ist alternierend,
- (2) Falls  $\alpha$  alternierend ist, so ist  $\beta = p!\alpha$ .

**Beweis:** (1) Sei  $\pi \in \mathfrak{S}_p$ . Dann gilt (beachte:  $\operatorname{sgn}(\pi\sigma) = \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma)$ ):

$$\begin{aligned} \beta(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p)}) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(v_{\sigma\pi(1)}, \dots, v_{\sigma\pi(p)}) \\ &= \operatorname{sgn}(\pi) \sum_{\pi\sigma \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sgn}(\pi\sigma)\alpha(v_{\pi\sigma(1)}, \dots, v_{\pi\sigma(p)}) \\ &= \operatorname{sgn}(\pi)\beta(v_1, \dots, v_p), \end{aligned}$$

also ist  $\beta$  alternierend.

(2) Wenn  $\alpha$  schon alternierend war, dann gilt

$$\begin{aligned} \beta(v_1, \dots, v_p) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sgn}(\sigma)^2\alpha(v_1, \dots, v_p) \\ &= p!\alpha(v_1, \dots, v_p). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

## II. Vektoranalysis

**Definition 10.4:** (1) Seien  $\alpha$  eine  $p$ -Linearform auf  $E$  und  $\beta$  eine  $q$ -Linearform auf  $E$ . Dann ist  $\alpha \otimes \beta$ , erklärt durch

$$(\alpha \otimes \beta)(v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q) := \alpha(v_1, \dots, v_p)\beta(w_1, \dots, w_q),$$

eine  $(p+q)$ -Linearform auf  $E$ .

(2) Seien  $\alpha, \beta$  zusätzlich alternierend, so wird ihr *äußeres Produkt*  $\alpha \wedge \beta$  durch

$$\begin{aligned} & (\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{p+q}) \\ & := \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{p+q}} \operatorname{sgn}(\pi) \alpha(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p)}) \beta(v_{\pi(p+1)}, \dots, v_{\pi(p+q)}) \end{aligned}$$

erklärt.  $\alpha \wedge \beta$  ist eine alternierende  $(p+q)$ -Linearform!

**Beispiel 10.5:** Seien  $e_1^* = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2^* = (0, 1, 0, \dots, 0) \in (\mathbb{R}^n)^*$ . Dann ist

$$e_1^* \wedge e_2^* = e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*.$$

**Satz 10.6:** (1)  $\alpha \wedge \beta$  ist alternierend,

(2) Es gelten:

(i) Die Distributivgesetze

$$\begin{aligned} (\alpha + \alpha') \wedge \beta &= \alpha \wedge \beta + \alpha' \wedge \beta, \\ \alpha \wedge (\beta + \beta') &= \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \beta', \end{aligned}$$

(ii)  $\wedge$  ist assoziativ, d. h.

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma),$$

(iii) Ist  $\alpha$  eine  $p$ -Linearform und  $\beta$  eine  $q$ -Linearform, dann ist

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{pq} \alpha \wedge \beta.$$

**Beweis:** (1) ist klar mit [Satz 10.3 \(1\)](#).

(2): (i) ist klar wegen der Bilinearität der Formel in [Definition 10.4](#)

(ii) Seien  $\alpha$  eine  $p$ -Linearform,  $\beta$  eine  $q$ -Linearform und  $\gamma$  eine  $r$ -Linearform. Dann gilt

$$\begin{aligned} & ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)(v_1, \dots, v_{p+q+r}) \\ &= \frac{1}{(p+q)!r!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{p+q+r}} \operatorname{sgn}(\pi) (\alpha \wedge \beta)(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p+q)}) \gamma(v_{\pi(p+q+1)}, \dots, v_{\pi(p+q+r)}) \\ &= \frac{1}{(p+q)!r!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{p+q+r}} \operatorname{sgn}(\pi) \gamma(v_{\pi(p+q+1)}, \dots, v_{\pi(p+q+r)}) \\ & \quad \cdot \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}} \operatorname{sgn}(\sigma) \alpha(v_{\pi\sigma(1)}, \dots, v_{\pi\sigma(p)}) \beta(v_{\pi\sigma(p+1)}, \dots, v_{\pi\sigma(p+q)}). \end{aligned}$$

Setze jetzt

$$\tau(i) := \begin{cases} \pi\sigma(i) & i \leq p+q \\ \pi(i) & i > p+q \end{cases},$$

dann ist  $\text{sgn}(\tau) = \text{sgn}(\pi)\text{sgn}(\sigma)$ , und

$$\sum_{\substack{\pi \in \mathfrak{S}_{p+q+r} \\ \sigma \in \mathfrak{S}_{p+q}}} = (p+q)! \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{p+q+r}}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} ((\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma)(v_1, \dots, v_{p+q+r}) &= \frac{1}{p!q!r!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_{p+q+r}} \text{sgn}(\tau) \alpha(v_{\tau(1)}, \dots, v_{\tau(p)}) \\ &\quad \beta(v_{\tau(p+1)}, \dots, v_{\tau(p+q)}) \gamma(v_{\tau(p+q+1)}, \dots, v_{\tau(p+q+r)}). \end{aligned}$$

Durch eine analoge Rechnung erhält man den gleichen Ausdruck für

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)(v_1, \dots, v_{p+q+r}).$$

(1) Es ist

$$(\beta \wedge \alpha)(v_1, \dots, v_{q+p}) = (\alpha \wedge \beta)(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p+q)})$$

mit

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & p & p+1 & \dots & p+q \\ q+1 & \dots & q+p & 1 & \dots & p \end{pmatrix}.$$

$\pi$  kann als Produkt von  $p \cdot q$  Transpositionen geschrieben werden, also  $\text{sgn}(\pi) = (-1)^{pq}$ , und somit erhalten wir

$$(\beta \wedge \alpha)(v_1, \dots, v_{q+p}) = (-1)^{pq} (\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_{p+q}),$$

was die Behauptung zeigt. ■

**Bemerkung 10.7:** Wie im Beweis zu [Satz 10.6 \(2\)](#) zeigt man: Sind  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  alternierende Multilinearformen, wobei  $\alpha_i$  vom Grad  $p_i$  ist, und  $p := \sum_{i=1}^m p_i$  ist, dann gilt:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_m(v_1, \dots, v_p) \\ &= \frac{1}{p_1! \dots p_m!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_p} \text{sgn}(\pi) \alpha_1(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p_1)}) \dots \alpha_m(v_{\pi(p-p_{m+1}+1)}, \dots, v_{\pi(p)}). \end{aligned}$$

**Satz 10.8:** Seien  $E$  ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum,  $e_1, \dots, e_n$  eine Basis von  $E$  und  $e_1^*, \dots, e_n^*$  sei die zugehörige duale Basis von  $E^*$ . Dann gelten:

(1) Der Raum der alternierenden  $p$ -Linearformen über  $E$  ist ein Vektorraum der Dimension  $\binom{n}{p}$ .

## II. Vektoranalysis

(2) Die Menge

$$\{e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^* \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n\}$$

bildet eine Basis der alternierenden  $p$ -Linearformen über  $E$ .

**Beweis:** Beachte, dass für  $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leq n$  gilt

$$(e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^*)(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \begin{cases} 1 & i_k = j_k \forall k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

d. h. die  $e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^*$  mit  $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n$  sind linear unabhängig.

Sei nun  $\alpha$  eine alternierende  $p$ -Linearform, dann ist  $\alpha$  eindeutig bestimmt durch die Werte  $\alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$  für beliebige  $1 \leq i_1, i_2, \dots \leq n$ . Falls  $i_k = i_l = i$  für  $k \neq l$ , so ist

$$\alpha(e_{i_1}, \dots, e_i, \dots, e_i, \dots, e_{i_p}) = -\alpha(e_{i_1}, \dots, e_i, \dots, e_i, \dots, e_{i_p}),$$

und somit ist  $\alpha(e_{i_1}, \dots, e_i, \dots, e_i, \dots, e_{i_p}) = 0$ . Aus diesem Grund brauchen wir nur die Werte auf Basisvektoren mit paarweise verschiedenen Indizes. Durch Vertauschung lässt sich jedes Indexpaar ordnen, damit genügt es, die geordneten Indizes zu betrachten. Dann gilt aber

$$\alpha = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^*, \quad (\text{II.2})$$

denn für den Wert unserer Darstellung von  $\alpha$  auf geordneten Basisvektoren  $(e_{j_1}, \dots, e_{j_p})$  gilt

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} \alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) e_{i_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{i_p}^*(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \alpha(e_{j_1}, \dots, e_{j_p}),$$

also stimmen beide Seiten von **Gl. (II.2)** auf geordneten Paaren von Basisvektoren überein. ■

**Definition 10.9:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Eine *Differentialform vom Grad  $p$*  auf  $U$  ist eine Abbildung

$$\omega : U \longrightarrow \{\text{alternierende } p\text{-Linearformen auf } \mathbb{R}^n\}.$$

**Bemerkung 10.10:** Die Differentialformen vom Grad  $p$  können punktweise addiert und mit reellen Funktionen multipliziert werden.

**Definition 10.11:** Seien  $\omega_1, \omega_2$  Differentialformen vom Grad  $p_1$  bzw.  $p_2$ . Das *äußere Produkt*  $\omega_1 \wedge \omega_2 =: \omega_1 \omega_2$  ist definiert durch

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(x) = \omega_1(x) \wedge \omega_2(x).$$

**Bemerkung 10.12:** (1)  $\omega_1 \wedge \omega_2$  ist eine  $p_1 + p_2$ -Differentialform.

(2) Für die Dachprodukte der beiden Differentialformen gelten die Rechenregeln

$$(i) (\omega_1 + \omega_1') \omega_2 = \omega_1 \omega_2 + \omega_1' \omega_2,$$

- (ii)  $\omega_1(\omega_2 + \omega'_2) = \omega_1\omega_2 + \omega_1\omega'_2$ ,
- (iii)  $(f\omega_1)\omega_2 = \omega_1(f\omega_2) = f(\omega_1\omega_2)$ ,
- (iv)  $(\omega_1\omega_2)\omega_3 = \omega_1(\omega_2\omega_3)$ ,
- (v)  $\omega_2\omega_1 = (-1)^{p_1p_2}\omega_1\omega_2$ , falls  $\omega_1$  eine  $p_1$ -Form und  $\omega_2$  eine  $p_2$ -Form ist.

**Notation 10.13:** Gemäß **Bemerkung 9.2** schreiben wir für die kanonische duale Basis  $e_1^*, \dots, e_n^*$  des  $\mathbb{R}^n$  auch  $dx_1, \dots, dx_n$  und somit für die Basis der alternierenden  $p$ -Linearformen aus **Satz 10.8** auch  $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^* := dx_{i_1} \cdots dx_{i_p}$ .

**Proposition 10.14 (und Definition):** Jede Differentialform  $\omega$  vom Grad  $p$  auf  $U$  besitzt eine eindeutig bestimmte Darstellung der Form

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} g_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \cdots dx_{i_p},$$

wobei  $g_{i_1 \dots i_p} : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Die Differentialform  $\omega$  heißt messbar bzw. stetig bzw. differenzierbar, falls alle  $g_{i_1 \dots i_p}$  messbar bzw. stetig bzw. differenzierbar sind.

**Beispiel 10.15:** Es seien  $n = 3$ ,  $U = \mathbb{R}^3$ . Wir bezeichnen dann

$$\begin{aligned} dx &= dx_1 = e_1^* \\ dy &= dx_2 = e_2^* \\ dz &= dx_3 = e_3^*. \end{aligned}$$

Sei

$$\omega_1(x, y, z) = x^2 dydz + \cos(z) dx dz$$

eine 2-Form und

$$\omega_2(x, y, z) = x dx + z dy + y dz$$

eine 1-Form. Dann ist

$$\begin{aligned} (\omega_1 \wedge \omega_2)(x, y, z) &= x^3 dydz dx + \cos(z)x dx dz dx + x^2 z dydz dy \\ &\quad + z \cos(z) dx dz dy + x^2 y dydz dz + \cos(z)y dx dz dz \\ &= (x^3 - z \cos(z)) dx dy dz. \end{aligned}$$

**Bemerkung 10.16:** (1) Wegen  $\omega \omega = (-1)^{p \cdot p} \omega \omega$  für eine  $p$ -Form  $\omega$  gilt für  $p$  ungerade

$$\omega \wedge \omega = 0.$$

(2) Die einzige  $p$ -Form für  $p > n$  ist 0, d. h. gilt für die Grade  $p_1, p_2$  der Differentialformen  $\omega_1, \omega_2$  die Ungleichung  $p_1 + p_2 > n$ , so gilt auch

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = 0.$$

## 11. Äußere Ableitung von Differentialformen

**Motivation 11.1:** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen. Eine 0-Form auf  $U$  ist eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Falls  $f$  differenzierbar ist, so ist die Ableitung  $df = Df : U \rightarrow (\mathbb{R}^n)^*$  eine 1-Form mit Koordinatendarstellung  $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ . Wir haben also einen Ableitungsoperator von den 0-Formen in die 1-Formen. Diesen wollen wir jetzt auf beliebige  $p$ -Formen ausdehnen.

**Definition 11.2:** Die Differentialform  $\omega$  habe die Darstellung

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} g_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}.$$

Dann erklären wir die *äußere Ableitung*  $d\omega$  durch

$$d\omega := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} dg_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}.$$

**Beispiel 11.3:** (1) Seien  $n = 2$  und  $\omega = f dx + g dy$  mit Funktionen  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist

$$\begin{aligned} d\omega &= df dx + dg dy \\ &= \left( \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dx + \left( \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy \right) dy \\ &= \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned}$$

(2) Seien  $n = 3$  und  $\omega(x, y, z) = x^2 dx + y dz$ . Dann ist

$$\begin{aligned} d\omega &= d(x^2) dx + dy dz \\ &= (2x dx + 0 dy + 0 dz) dx + dy dz = dy dz. \end{aligned}$$

**Bemerkung 11.4:** (1) Die äußere Ableitung einer Differentialform erhöht ihren Grad um 1.

(2)  $d$  ist linear, d. h.  $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$ .

**Satz 11.5:** Seien  $\omega_1, \omega_2$  differenzierbare Differentialformen vom Grad  $p$  bzw.  $q$ . Dann gilt

$$d(\omega_1 \omega_2) = d(\omega_1) \omega_2 + (-1)^p \omega_1 d(\omega_2).$$

**Beweis:** Wegen der Linearität von  $d$  genügt es, die Behauptung für Differentialformen  $\omega_1 = f dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$ ,  $\omega_2 = g dx_{j_1} \dots dx_{j_q}$  zu zeigen. Es gilt

$$d(fg) = (df)g + f(dg),$$



also

$$\begin{aligned}
 d(\omega_1 \omega_2) &= d(f dx_{i_1} \cdots dx_{i_p} g dx_{j_1} \cdots dx_{j_q}) \\
 &= d(f) g dx_{i_1} \cdots dx_{i_p} dx_{j_1} \cdots dx_{j_q} + f dg dx_{i_1} \cdots dx_{i_p} dx_{j_1} \cdots dx_{j_q} \\
 &= d(f) g dx_{i_1} \cdots dx_{i_p} dx_{j_1} \cdots dx_{j_q} + (-1)^p f dx_{i_1} \cdots dx_{i_p} dg dx_{j_1} \cdots dx_{j_q} \\
 &= (d\omega_1)\omega_2 + (-1)^p \omega_1 d(\omega_2). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

**Satz 11.6:** Sei  $\omega$  eine zweimal stetig differenzierbare Differentialform vom Grad  $p$  auf  $\mathbb{R}^n$  mit  $p < n$ . Dann ist  $d(d\omega) = 0$ .

**Beweis:** Wegen der Linearität der äußeren Ableitung genügt es, Differentialformen  $\omega$  der Form

$$\omega = f dx_{i_1} \cdots dx_{i_p}$$

für beliebige geordnete Indizes  $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$  zu betrachten. Die äußere Ableitung von  $\omega$  ist in diesem Fall

$$d\omega = df dx_{i_1} \cdots dx_{i_p}.$$

Für die äußere Ableitung  $d(d\omega)$  gilt nun

$$\begin{aligned}
 d(d\omega) &= d(df) dx_{i_1} \cdots dx_{i_p} + (-1)^p df d(dx_{i_1} \cdots dx_{i_p}) \\
 &= d(df) dx_{i_1} \cdots dx_{i_p},
 \end{aligned}$$

da  $d1 = 0$ . Die äußere Ableitung  $df$  ist  $df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ , damit ist

$$d(df) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right) dx_i dx_j = 0,$$

also was zu zeigen war. \blacksquare

## 12. Stammfunktionen von Differentialformen

**Definition 12.1:** Sei  $\omega$  eine stetige Differentialform vom Grad  $p$  auf  $U$ , wobei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen.

- (1) Eine Differentialform  $\alpha$  vom Grad  $p - 1$  auf  $U$  heißt *Primitive* oder *Stammfunktion* zu  $\omega$ , falls  $\omega = d\alpha$ . Die Differentialform  $\omega$  heißt *exakt*, falls es eine Stammfunktion besitzt.
- (2)  $\omega$  heißt *geschlossen*, falls  $d\omega = 0$  ist.

**Bemerkung 12.2:** (1) Wegen  $d(d\alpha) = 0$  folgt, dass  $\omega$  erst recht geschlossen ist, wenn  $\omega$  exakt ist. Die Differentialform  $\omega = dx + x dy$  ist nicht geschlossen, da  $d\omega = dx dy \neq 0$ , also auch nicht exakt.

- (2) Im Folgenden werden wir uns mit der Frage beschäftigen, unter welchen Bedingungen die Umkehrung gilt, d. h. unter welchen Bedingungen geschlossene Differentialformen auch exakt sind. Wir werden sehen, dass im Allgemeinen die Umkehrung nicht gilt; wenn das Gebiet  $U$  allerdings „schön“ genug ist, dann gilt sie schon.

**Beispiel 12.3:** Betrachte auf  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  die Differentialform vom Grad 1

$$\omega(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} dx.$$

Die Differentialform  $\omega$  ist geschlossen, denn

$$d\omega = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy dx = \left( \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) dx dy = 0,$$

aber  $\omega$  ist nicht exakt. Angenommen, es gälte  $\omega = df$  für  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , also  $\omega$  habe die Darstellung

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Für diese Funktion  $f$  müsste dann gelten

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Betrachte die Abbildung  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  erklärt durch

$$g(t) := f(\cos(t), \sin(t)).$$

$g$  ist stetig und periodisch auf  $\mathbb{R}$ , d. h.  $g$  nimmt in einem  $t_0 \in \mathbb{R}$  ihr Maximum an, d. h.  $g'(t_0) = 0$ . Es ist aber

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

$$= \frac{\sin(t)}{\sin^2(t) + \cos^2(t)} \sin(t) + \frac{\cos(t)}{\sin^2(t) + \cos^2(t)} \cos(t) = 1$$

für alle  $t$ , also kann es keine solche Funktion  $f$  geben.

**Definition 12.4:** Eine Teilmenge  $U \subset \mathbb{R}^n$  heißt *sternförmig*, falls es einen Punkt  $z \in U$  gibt, so dass für jedes andere  $x \in U$  die Verbindungsstrecke zwischen  $z$  und  $x$  in  $U$  liegt.

Jedes konvexe Gebiet ist sternförmig, jedes sternförmige Gebiet ist zusammenhängend.

**Lemma 12.5 (von Poincaré):** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und sternförmig. Dann ist jede geschlossene Differentialform beliebigen Grades  $p \geq 1$  exakt, d. h. ist  $d\omega = 0$ , so existiert eine  $(p-1)$ -Form  $\alpha$  mit  $\omega = d\alpha$ .

**Beweis:** Sei zunächst  $p = 1$  und  $\omega$  habe die Darstellung

$$\omega = \sum_{i=1}^n g_i dx_i.$$

Ohne Einschränkung sei der spezielle Punkt für sternförmiges  $U$  der Punkt  $z = 0$ . Die Beweisidee ist, für einen Punkt  $z \neq x \in U$  die Funktion  $\tilde{\omega}(t, x) := \omega(tx)$  für  $t \in [0, 1]$  zu betrachten und diese Funktion entlang der Verbindung von  $z$  zu  $x$  zu integrieren, also einem Ausdruck der Gestalt

$$\alpha = \int_0^1 \omega(tx)$$

Sinn zu geben. Formal entwickeln wir in Differentialen und berücksichtigen nur Terme, die  $dt$  enthalten:

$$\begin{aligned} \omega(tx) &= \sum_{i=1}^n g_i(tx) d(tx_i) \\ &= \sum_{i=1}^n g_i(tx) (dt x_i + t dx_i) = \sum_{i=1}^n g_i(tx) x_i dt + \sum_{i=1}^n t g_i(tx) dx_i. \end{aligned}$$

Wir nehmen davon nur den ersten Term und definieren somit den Kandidaten  $\alpha$  für die Stammfunktion von  $\omega$  durch

$$\alpha(x) := \int_0^1 \left( \sum_{i=1}^n g_i(tx) x_i \right) dt.$$

Unter Verwendung von  $d\omega = 0$  zeigen wir nun, dass  $\alpha$  eine Stammfunktion von  $\omega$  ist. Es gilt

$$d\alpha(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n d(g_i(tx) x_i) dt$$

## II. Vektoranalysis

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial g_i(tx)}{\partial x_j} x_i + g_i(tx) \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right] dx_j \right) dt,$$

also (unter Benutzung von  $d\omega = 0$ )

$$\begin{aligned} d\alpha(x) &= \int_0^1 \left( \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial g_j(tx)}{\partial x_i} x_i dx_j + g_j(tx) dx_j \right) \right) dt \\ &= \int_0^1 \left( \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} (g_j(tx)t) dx_j \right) dt \\ &= \sum_{j=1}^n [g_j(tx)t]_0^1 dx_j \\ &= \sum_{j=1}^n g_j(x) dx_j \\ &= \omega(x). \end{aligned}$$

Für  $p > 1$  setzt man die Darstellung

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} g_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \cdots dx_{i_p}$$

an und wählt für  $\alpha$  analog zum Fall  $p = 1$  den Ansatz  $\alpha := \int_0^1 \omega(tx)$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \omega(tx) &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} g_{i_1 \dots i_p}(tx) d(tx_{i_1}) \cdots d(tx_{i_p}) \\ &= dt \wedge \left\{ \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} g_{i_1 \dots i_p}(tx) t^{p-1} dx_{i_1} \cdots \cancel{dx_{i_k}} \cdots dx_{i_p} x_{i_k} (-1)^{k-1} \right\} + \text{Terme ohne } dt. \end{aligned}$$

Wir setzen also

$$\alpha(x) := \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} x_{i_k} \left( \int_0^1 g_{i_1 \dots i_p}(tx) t^{p-1} dt \right) dx_{i_1} \cdots \cancel{dx_{i_k}} \cdots dx_{i_p}.$$

Dann rechnet man analog (nur um einiges aufwändiger) zum Fall  $p = 1$  nach, dass  $\alpha$  das Gewünschte leistet, also dass  $d\alpha = \omega$  gilt. ■

### 13. Transformation von Differentialformen unter differenzierbaren Abbildungen

**Definition 13.1:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $V \subset \mathbb{R}^n$  offen, ferner seien  $\varphi : U \rightarrow V$  stetig differenzierbar und  $\omega$  eine  $p$ -Form auf  $V$  mit  $0 \leq p \leq n$ . Dann ist die mit  $\varphi$  zurückgeholte  $p$ -Form  $\varphi^*\omega$  auf  $U$  durch

$$((\varphi^*\omega)(x))(v_1, \dots, v_p) := \omega(\varphi(x))(\varphi'(x) \cdot v_1, \dots, \varphi'(x) \cdot v_p)$$

erklärt.

**Proposition 13.2:**  $\varphi^*$  hat folgende Eigenschaften:

- (1)  $\varphi^*(\omega_1 + \omega_2) = \varphi^*(\omega_1) + \varphi^*(\omega_2)$ .
- (2)  $\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*(\omega_1) \wedge \varphi^*(\omega_2)$ .
- (3) Falls  $\omega = df$ , d. h.  $p = 1$ ,  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ , so ist

$$\varphi^*(\omega) = d(f \circ \varphi).$$

- (4) Falls

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} g_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \cdots dx_{i_p},$$

so ist

$$\varphi^*(\omega) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} (g_{i_1 \dots i_p} \circ \varphi) d(x_{i_1} \circ \varphi) \cdots d(x_{i_p} \circ \varphi).$$

**Beweis:** (1) Klar.

- (2) Es ist

$$(\varphi^*(\omega_1 \omega_2)(x))(v_1, \dots, v_{p+q}) = ((\omega_1 \omega_2)(\varphi(x)))(\varphi'(x) \cdot v_1, \dots, \varphi'(x) \cdot v_{p+q}).$$

Für  $((\omega_1 \omega_2)(\varphi(x)))(\varphi'(x) \cdot v_1, \dots, \varphi'(x) \cdot v_{p+q}) =: F(\mathbf{v})$  gilt die Darstellung

$$F(\mathbf{v}) = \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{p+q}} \operatorname{sgn}(\pi) (\omega_1(\varphi(x)))(\varphi'(x) \cdot v_{\pi(1)}, \dots, \varphi'(x) \cdot v_{\pi(p)}) \omega_2(\varphi(x))(\varphi'(x) \cdot v_{\pi(p+1)}, \dots, \varphi'(x) \cdot v_{\pi(p+q)}),$$

also gilt insgesamt

$$\begin{aligned} F(\mathbf{v}) &= \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{p+q}} \operatorname{sgn}(\pi) (\varphi^*\omega_1)(x)(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p)}) \cdot (\varphi^*\omega_2)(x)(v_{\pi(p+1)}, \dots, v_{\pi(p+q)}) \\ &= (\varphi^*\omega_1(x) \wedge \varphi^*\omega_2(x))(v_1, \dots, v_{p+q}), \end{aligned}$$

damit also das Behauptete.

## II. Vektoranalysis

(3) Wir setzen  $\omega = df = Df$ , dann gilt

$$d(f \circ \varphi)(x) = df(\varphi(x))\varphi'(x) = \varphi^*(df)(x),$$

denn wir haben

$$f : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi : \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^m, \quad f \circ \varphi : \mathbb{R}^m \supset U \rightarrow \mathbb{R}$$

und

$$\omega(x) = df(x) = (\text{grad}(f))(x).$$

Etwas präziser: Für  $w = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$  ist

$$\omega(x)(w) = (\text{grad}(f))(x)(w) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\xi_i,$$

insgesamt haben wir also

$$d(f \circ \varphi)(x) = (\text{grad}(f \circ \varphi))(x) = (\text{grad}(f))(\varphi(x))\varphi'(x),$$

also für  $v \in \mathbb{R}^m$

$$d(f \circ \varphi)(x)(v) = (\text{grad}(f))(\varphi(x)) \cdot (\varphi'(x) \cdot v) = \omega(\varphi(x))(\varphi'(x) \cdot v) = \varphi^*(\omega)(x)(v).$$

(4) Folgt aus (1), (2), (3). Nach Aussage (1) genügt es wegen der Linearität, Differentialformen  $\omega = g_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \cdots dx_{i_p}$  zu betrachten. Für solche  $\omega$  gilt

$$\varphi^*(g_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \cdots dx_{i_p}) = \varphi^*(g_{i_1, \dots, i_p})\varphi^*(dx_{i_1}) \cdots \varphi^*(dx_{i_p}). \quad \blacksquare$$

**Beispiel 13.3:** Betrachte die 2-Form  $\omega(x, y, z) = x dydz + y dzdx + z dxdy$  in  $\mathbb{R}^3$ . Hole diese zurück nach  $\mathbb{R}^2$  mit der Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (\cos(u) \cos(v), \sin(u) \cos(v), \sin(v)). \end{aligned}$$

Die Abbildung  $\varphi$  parametrisiert die Kugeloberfläche  $\mathbb{S}^2$  durch sphärische Koordinaten  $u, v$ . Für die Differentiale erhalten wir

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv = -\sin(u) \cos(v) du - \cos(u) \sin(v) dv, \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv = \cos(u) \cos(v) du - \sin(u) \sin(v) dv, \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv = \cos(v) dv, \end{aligned}$$

also erhalten wir für die zurückgeholte Form

$$\begin{aligned} \varphi^*\omega(u, v) &= \cos(u) \cos(v)(\cos(u) \cos^2(v) dudv) - \sin(u) \cos(v) \sin(u) \cos^2(v) dvdu \\ &\quad + \sin(v)(\sin^2(u) \cos(v) \sin(v) dudv - \cos^2(u) \cos(v) \sin(v) dvdu) \\ &= dudv (\cos^2(u) \cos^2(v) \cos(v) + \sin^2(u) \cos^2(v) \cos(v) \\ &\quad + \sin^2(u) \sin^2(v) \cos(v) + \cos^2(u) \sin^2(v) \cos(v)) \\ &= \cos(v) dudv. \end{aligned}$$

**Satz 13.4:** Falls  $\omega$  stetig differenzierbar ist und  $\varphi$  zweimal stetig differenzierbar ist, so ist  $\varphi^*\omega$  stetig differenzierbar und es gilt:

$$\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*(\omega)).$$

**Beweis:** Sei  $\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} g_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \cdots dx_{i_p}$ , dann ist

$$d\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} dg_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \cdots dx_{i_p}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} \varphi(d\omega) &= \varphi^* \left( \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} dg_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \cdots dx_{i_p} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \varphi^*(dg_{i_1, \dots, i_p}) \varphi^*(dx_{i_1}) \cdots \varphi^*(dx_{i_p}) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} (g_{i_1, \dots, i_p} \circ \varphi) d(x_{i_1} \circ \varphi) \cdots d(x_{i_p} \circ \varphi) \\ &= d\varphi^*(\omega) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

## 14. Flächeninhalt von parametrisierten Flächen

**Definition 14.1:** Sei  $I \subset \mathbb{R}^k$ . Eine Abbildung  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *differenzierbar*, (*stetig differenzierbar* usw.), falls  $\varphi$  zu einer differenzierbaren (stetig differenzierbaren usw.) Abbildung  $\bar{\varphi} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  fortgesetzt werden kann, wobei  $I \subset U$ ,  $U \subset \mathbb{R}^k$  offen.

**Definition 14.2:** Sei  $0 < k \leq n$ . Eine *k-dimensionale parametrisierte Fläche* im  $\mathbb{R}^n$  ist eine stetig differenzierbare Abbildung  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  im Sinne von [Definition 14.1](#), wobei  $I \subset \mathbb{R}^k$  messbar. Für die *k-dimensionale Fläche* notieren wir das Tupel  $(I, \varphi)$ .

**Beispiel 14.3:** (1) Stetig differenzierbare Kurven  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  sind eindimensionale parametrisierte Flächen.

(2) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : [0, \pi] \times [-\pi, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t) &\longmapsto (r \sin(s) \cos(t), r \sin(s) \sin(t), r \cos(s)) \end{aligned}$$

mir  $r > 0$  ist eine 2-dimensionale parametrisierte Fläche im  $\mathbb{R}^3$ , die Kugeloberfläche der Kugel mit Radius  $r$ .

**Motivation 14.4:** Was ist das Volumen bzw. der Flächeninhalt einer parametrisierten Fläche  $(I, \varphi)$ ?

(1) Für  $k = 1$ ,  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  haben wir in der Analysis II für die Länge der Kurve die Formel

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt$$

bewiesen.

(2) Für eine bijektive Abbildung  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist das Volumen des Bildes durch den Transformationssatz [Satz 6.10](#) bestimmt:

$$\lambda^n(T(A)) = \int_A |\det(T'(x))| d\lambda^n(x) = \int_A \sqrt{\det((T'(x))^*(T'(x)))} d\lambda^n(x)$$

(3) Auch für  $k < n$  ist  $\sqrt{\det(T^*T)}$  für lineares  $T : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$  das Volumen von  $T([0, 1]^k) \subset \mathbb{R}^n$ .

(4) Approximation von beliebigen Abbildungen  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch kleine *k*-dimensionale Würfel motiviert dann die folgende Definition.

**Definition 14.5:** Der Flächeninhalt bzw. das Volumen der parametrisierten Fläche  $(I, \varphi)$  ist bestimmt durch

$$\text{Vol}(I, \varphi) := \int_I \sqrt{\det((\varphi'(x))^*(\varphi'(x)))} d\lambda^k(x).$$



**Bemerkung 14.6:** Im Allgemeinen gilt  $\text{Vol}(I, \varphi) \neq \text{Vol}(\varphi(I))$ , falls  $\varphi$  nicht injektiv ist. Ist  $\varphi$  nicht injektiv, so können Teile von  $\text{Im}(\varphi)$  öfter durchlaufen werden, z. B. für

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 4\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (\cos(t), \sin(t)) \end{aligned}$$

wird  $\mathbb{S}^1$  zweimal durchlaufen und  $\text{Vol}([0, 4\pi], \varphi) = \int_0^{2\pi} \|\dot{\varphi}(t)\| dt = 4\pi$ .

**Satz 14.7:** Die Definition des Flächeninhaltes in [Definition 14.5](#) ist invariant unter Parameterwechsel. Seien  $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}^k$  messbar,  $I_1 \subset U_1, I_2 \subset U_2$  mit  $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^k$  offen. Sei  $\Theta : U_1 \rightarrow U_2$  bijektiv und stetig differenzierbar mit  $\Theta(I_1) = I_2$ ,  $\Theta^{-1}$  ebenfalls stetig und differenzierbar. Sei  $\varphi_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine parametrisierte  $k$ -dimensionale Fläche und  $\varphi_1 := \varphi_2 \circ \Theta : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Dann gilt

$$\text{Vol}(I_1, \varphi_1) = \text{Vol}(I_2, \varphi_2).$$

**Beweis:** Es gilt (wobei wir den Transformationsatz [Satz 6.10](#) benutzen)

$$\begin{aligned} \text{Vol}(I_1, \varphi_1) &= \int_{I_1} \sqrt{\det((\varphi_1'(x))^*(\varphi_1'(x)))} dx \\ &= \int_{I_1} \sqrt{\det([\varphi_2'(\Theta(x))(\Theta'(x))]^*[\varphi_2'(\Theta(x))(\Theta'(x))])} dx \\ &= \int_{I_1} \sqrt{\det[(\Theta'(x))^*[\varphi_2'(\Theta(x))]^*[\varphi_2'(\Theta(x))(\Theta'(x))]]} dx \\ &= \int_{I_1} \sqrt{\det([\varphi_2'(\Theta(x))]^*[\varphi_2'(\Theta(x))]|\det(\Theta'(x))|)} dx \\ &= \int_{I_2} \sqrt{\det([\varphi_2'(y))^*(\varphi_2'(y))]} dy = \text{Vol}(I_2, \varphi_2). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Beispiel 14.8 (Kugeloberfläche mit Radius  $r > 0$ ):** Wir parametrisieren

$$\mathbb{S}^2(r) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = r\}$$

mithilfe der Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : [0, \pi] \times [-\pi, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t) &\longmapsto (r \sin(s) \cos(t), r \sin(s) \sin(t), r \cos(s)). \end{aligned}$$

Es ist

$$(\varphi')(s, t) = \begin{pmatrix} r \cos(s) \cos(t) & -r \sin(s) \sin(t) \\ r \cos(s) \sin(t) & r \sin(t) \cos(t) \\ -r \sin(s) & 0 \end{pmatrix},$$

damit gilt

$$(\varphi'(s, t))^* \varphi'(s, t) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2(s) \end{pmatrix},$$

also  $\sqrt{\det [(\varphi'(s, t))^* \varphi'(s, t)]} = r^2 |\sin(s)|$ , damit

$$\begin{aligned} \text{Vol}(I, \varphi) &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} r^2 |\sin(s)| \, ds \, dt \\ &= 2\pi r^2 [-\cos(s)]_0^{\pi} = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

**Definition 14.9:** Seien  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  offen. Eine Abbildung  $\alpha : U \rightarrow V$  heißt *Diffeomorphismus*, falls  $\alpha$  bijektiv ist und  $\alpha$  und  $\alpha^{-1}$  stetig differenzierbar sind.

**Definition 14.10:** (1) Eine *k-dimensionale parametrisierte Untermannigfaltigkeit* von  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq k$ ) ist eine parametrisierte Fläche  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit  $I \subset \mathbb{R}^k$  messbar, so dass  $\varphi$  fortgesetzt werden kann zu einem Diffeomorphismus  $\alpha : U \rightarrow V$ ,  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $I \subset U$ ,  $I \subset \mathbb{R}^k$ , wobei wir  $\mathbb{R}^k$  identifizieren mit  $\mathbb{R}^k \times 0 \subset \mathbb{R}^n$ .

(2) Eine *k-dimensionale Untermannigfaltigkeit* von  $\mathbb{R}^n$  ist eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$ , so dass zu jedem  $x \in M$  eine offene Menge  $V \subset \mathbb{R}^n$  existiert, so dass  $M \cap V$  eine parametrisierte Untermannigfaltigkeit ist. Die Abbildung  $\varphi : I \rightarrow M \cap V$  heißt *Parametrisierung*,  $\varphi^{-1}$  heißt *Karte*.

**Satz 14.11:** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine Untermannigfaltigkeit. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Maß  $\text{Vol}$  auf den Borelmengen von  $M$ , so dass für jede Parametrisierung  $\varphi : I \rightarrow M \cap V$  und jede Borelmenge  $E \subset I$  gilt

$$\text{Vol}(\varphi(E)) = \text{Vol}(E, \varphi).$$

Dabei betrachten wir  $M$  als metrischen Raum, welches dann die Begriffe der offenen und damit der Borelmengen von  $M$  ergibt.

**Beweis:** Wir wollen den Beweis nur skizzieren. Sei  $A \subset M$  eine Borelmenge. Man kann zeigen, dass  $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ , so dass jedes  $A_i$  in einer Karte  $(I_i, \varphi_i)$  liegt. Definiere dann

$$\text{Vol}(A) := \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{Vol}(A_i) := \sum_{i \in \mathbb{N}} \text{Vol}(\varphi_i^{-1}(A_i), \varphi_i).$$

Man kann zeigen, dass diese Definition unabhängig von der Auswahl der Parametrisierungen (mit (18.7)) ist und dass  $\text{Vol}$   $\sigma$ -additiv ist, also ein Maß auf  $M$ . ■

## 15. Integration von Differentialformen

**Definition 15.1:** Sei  $I \subset \mathbb{R}^p$  eine Borelmenge,  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\varphi : I \rightarrow U$  stetig differenzierbar und  $\omega$  eine  $p$ -Form auf  $U$ . Dann ist  $\varphi^*(\omega)$  eine  $p$ -Form auf  $I$ , d. h.

$\varphi^*(\omega) = f dx_1 \cdots dx_p$  für eine Funktion  $f$  auf  $I$ . Wir nennen  $\omega$  bzgl.  $\varphi$  *integrierbar*, falls  $f$  integrierbar ist und wir setzen

$$\int_{\varphi} \omega := \int_I f d\lambda^p(x).$$

**Beispiel 15.2:** (1) Die Integration einer 1-Form über eine Kurve wird auf dem zwölften Übungsblatt näher untersucht.

(2) Bei der Integration einer 2-Form über eine parametrisierte zweidimensionale Untermannigfaltigkeit im  $\mathbb{R}^3$  betrachten wir die Situation

$$\mathbb{R}^2 \supset I \xrightarrow{\varphi} M$$

mit einer Differentialform

$$\omega = f_1 dx_2 dx_3 + f_2 dx_3 dx_1 + f_3 dx_1 dx_2.$$

Wir identifizieren  $\omega$  mit einem Vektorfeld durch  $\omega = \langle F, d\vec{A} \rangle$ , wobei wir setzen  $F := (f_1, f_2, f_3)$ . Der Rückzug ist dann

$$\begin{aligned} \varphi^*(\omega) &= \varphi^*(f_1)\varphi^*(dx_2)\varphi^*(dx_3) \\ &\quad + \varphi^*(f_2)\varphi^*(dx_3)\varphi^*(dx_1) + \varphi^*(f_3)\varphi^*(dx_1)\varphi^*(dx_2), \end{aligned}$$

wobei  $\varphi^*(dx_i) = d\varphi^* x_i = d(x_i \circ \varphi) = d\varphi_i$ . Unsere Parametrisierung  $\varphi$  hat die Darstellung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 \supset I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (s, t) &\longmapsto (\varphi_1(s, t), \varphi_2(s, t), \varphi_3(s, t)), \end{aligned}$$

mit den Rückzügen

$$\varphi^*(dx_i) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial s} ds + \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} dt.$$

Damit ist der Rückzug von  $\omega$  vermöge  $\varphi$

$$\begin{aligned} \varphi^*(\omega) &= dsdt \left\{ f_1 \circ \varphi \left( \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} \right) + f_2 \circ \varphi \left( \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} \right) \right. \\ &\quad \left. + f_3 \circ \varphi \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} \right) \right\} \\ &= \langle F \circ \varphi, \tilde{n}(\varphi) \rangle dsdt \end{aligned}$$

mit der Festsetzung

$$\tilde{n}(\varphi) := \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

## II. Vektoranalysis

Dabei haben wir das *Kreuzprodukt* oder auch *Vektorprodukt* auf dem  $\mathbb{R}^3$  verwendet:

$$\begin{aligned} \times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (v, w) &\longmapsto v \times w := \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht, dass dieses folgende Eigenschaften hat:

- (i)  $v \times w = -w \times v \forall v, w \in \mathbb{R}^3$ ,
- (ii)  $\langle u, v \times w \rangle = \det(u, v, w) \forall u, v, w \in \mathbb{R}^3$ ,
- (iii)  $\|v \times w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 \sin^2(\angle(v, w)) = \det((v, w)^\top (v, w)) \forall v, w \in \mathbb{R}^3$ .

Der Vektor  $\tilde{n}(\varphi)(s, t)$  ist also der Normalenvektor der parametrisierten Fläche  $M$  im Punkt  $\varphi(s, t)$  mit Länge

$$\|\tilde{n}(\varphi)\| = \det \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^\top \left( \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right] = \det [(\varphi')^* \varphi'],$$

also gilt im Besonderen an der Stelle  $\varphi(s, t)$  für die Länge

$$\|\tilde{n}(\varphi)(s, t)\| = \sqrt{\det [(\varphi')^*(s, t) \cdot \varphi'(s, t)]}.$$

Bezeichnen wir mit  $n(\varphi)$  den entsprechenden normierten Einheitsnormalenvektor, so gilt dann

$$\varphi^*(\omega) = \langle F \circ \varphi, n(\varphi) \rangle \sqrt{\det [(\varphi')^* \varphi']} ds dt,$$

und damit erhalten wir für das Integral

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} \omega &= \int_I \langle F(\varphi(s, t)), n(\varphi)(s, t) \rangle \sqrt{\det [(\varphi')^*(s, t) \cdot \varphi'(s, t)]} ds dt \\ &= \int_M \langle F(\eta), n(\eta) \rangle d\text{Vol}(\eta). \end{aligned}$$

- (3) Als konkretes Beispiel der eben hergeleiteten Formel betrachten wir die Kugeloberfläche  $\mathbb{S}^2(1)$  mit der Differentialform

$$\omega(x, y, z) = x dy dz + y dz dx + z dx dy.$$

Nach Aufgabe 2 von Blatt 11 identifizieren wir  $\omega$  mit  $\langle F, d\vec{A} \rangle$  vermöge des Vektorfelds  $F = (x, y, z)$ . Da  $F$  orthogonal auf der Kugeloberfläche steht, gilt  $\langle F(\eta), n(\eta) \rangle = 1$ , also ist  $\int_{\varphi} \omega = \int_M d\text{Vol}(\eta) = \text{Vol}(M)$ . Nun gilt nach **Beispiel 13.3**  $\varphi^*(\omega)(u, v) = \cos(v) du dv$ , also

$$\int_{\varphi} \omega = \int_I \cos(v) du dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(v) du dv = 2\pi [\sin(v)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi.$$

**Satz 15.3:** Seien  $I \subset \mathbb{R}^p$  eine Borelmenge,  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\varphi : I \rightarrow U$  stetig differenzierbar und  $\omega_1, \omega_2$  zwei  $p$ -Formen auf  $U$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Dann gelten

$$(1) \int_{\varphi}(\omega_1 + \omega_2) = \int_{\varphi} \omega_1 + \int_{\varphi} \omega_2,$$

$$(2) \int_{\varphi}(\lambda\omega_1) = \lambda \int_{\varphi} \omega_1.$$

**Beweis:** Aus den Rechenregeln für den Rückzug

$$(1) \varphi^*(\omega_1 + \omega_2) = \varphi^*(\omega_1) + \varphi^*(\omega_2),$$

$$(2) \varphi^*(\lambda\omega_1) = \lambda\varphi^*\omega_1$$

folgen beide Behauptungen des Satzes. ■

**Satz 15.4 (Parameterwechsel):** Seien  $I \subset \mathbb{R}^p$  eine Borelmenge,  $U \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\varphi : I \rightarrow U$  stetig differenzierbar. Des Weiteren seien  $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $I \subset V_1$ ,  $\Theta : V_2 \rightarrow V_1$  ein Diffeomorphismus,  $J := \Theta^{-1}(I) \subset V_2$  und  $\psi := \varphi \circ \Theta : J \rightarrow U$ . Der Diffeomorphismus  $\Theta$  heißt

$$(1) \text{ orientierungserhaltend, falls } \det(\Theta'(x)) > 0 \quad \forall x \in J,$$

$$(2) \text{ orientierungsumkehrend, falls } \det(\Theta'(x)) < 0 \quad \forall x \in J.$$

Ist nun  $\omega$  eine  $p$ -Form auf  $U$ , dann gilt

$$(1) \int_{\psi} \omega = \int_{\varphi} \omega, \text{ falls } \Theta \text{ orientierungserhaltend ist,}$$

$$(2) \int_{\psi} \omega = - \int_{\varphi} \omega, \text{ falls } \Theta \text{ orientierungsumkehrend ist.}$$

**Proposition 15.5:** Seien  $U \subset \mathbb{R}^p$ ,  $V \subset \mathbb{R}^n$ ,  $W \subset \mathbb{R}^k$  offen und  $\varphi_1 : U \rightarrow V$ ,  $\varphi_2 : V \rightarrow W$  stetig differenzierbar, dann gilt  $(\varphi_2 \circ \varphi_1)^* = \varphi_1^* \circ \varphi_2^*$ .

**Beweis:** Sei  $\omega$  eine  $p$ -Form auf  $W$ . Zu zeigen ist, dass

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1)^*(\omega) = \varphi_1^*(\varphi_2^*(\omega)).$$

Es gilt für beliebige Vektoren  $\xi_1, \dots, \xi_p \in W$

$$\begin{aligned} (\varphi_2 \circ \varphi_1)^*\omega(x)(\xi_1, \dots, \xi_p) &= \omega(\varphi_2 \circ \varphi_1(x))((\varphi_2 \circ \varphi_1)'(x)\xi_1, \dots, (\varphi_2 \circ \varphi_1)'(x)\xi_p) \\ &= \omega(\varphi_2(\varphi_1(x)))(\varphi_2'(\varphi_1(x))\varphi_1'(x)\xi_1, \dots, \varphi_2'(\varphi_1(x))\varphi_1'(x)\xi_p) \\ &= \varphi_2^*\omega(\varphi_1(x))(\varphi_1'(x)\xi_1, \dots, \varphi_1'(x)\xi_p) \\ &= \varphi_1^*(\varphi_2^*\omega)(x)(\xi_1, \dots, \xi_p). \end{aligned}$$
■

**Beweis (von Satz 15.4):** Mit Proposition 15.5 und Aufgabe 3 auf Aufgabenblatt 12 lässt sich der Rückzug entlang  $\psi$  schreiben als

$$\psi^*\omega(x) = (\varphi \circ \Theta)^*\omega(x) = \Theta^*(\varphi^*(\omega))(x) = \det(\Theta'(x))\varphi^*\omega(\Theta(x)).$$

D.h. mit  $\varphi^*\omega = f_1 dx_1 \cdots dx_p$  gilt also

$$\psi^*(\omega) = f \circ \Theta \cdot \det(\Theta') dx_1 \cdots dx_p.$$

## II. Vektoranalysis

Insgesamt erhalten wir also

$$\int_{\psi} \omega = \int_J (f \circ \Theta)(x) \det(\Theta'(x)) d\lambda^p(x)$$

und

$$\int_{\varphi} \omega = \int_I f(x) d\lambda^p(x) = \int_J f(\Theta(y)) \cdot |\det(\Theta'(y))| d\lambda^p(y) = \pm \int_{\psi} \omega,$$

mit Vorzeichen entsprechend der Orientierung von  $\Theta$ . ■

## 16. Berandete Mannigfaltigkeiten und Zerlegung der Eins

Eine  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit entspricht lokal dem  $\mathbb{R}^k$ , eine  $k$ -dimensionale berandete Untermannigfaltigkeit soll lokal aussehen, wie der  $\mathbb{R}^k$  mit Rand; der sogenannte abgeschlossene Halbraum  $\mathbb{H}^k$ .

**Notation 16.1:** Wir setzen  $\mathbb{H}^k := \{x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_k \geq 0\}$  und wir nennen

$$\partial\mathbb{H}^k := \{x \in (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_k = 0\}$$

den Rand von  $\mathbb{H}^k$ .

**Definition 16.2:** (1) Eine Teilmenge  $M \subset \mathbb{R}^n$  heißt *k-dimensionale berandete Untermannigfaltigkeit* des  $\mathbb{R}^n$ , wenn sie lokal diffeomorph zu  $\mathbb{H}^k$  ist, d. h. zu jedem  $x \in M$  gibt es eine in  $M$  offene Umgebung  $U$  und einen Diffeomorphismus  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{R}^k$  auf eine offene Teilmenge  $\alpha(U)$  von  $\mathbb{H}^k$ .

[ $U$  ist genau dann offen in  $M \subset \mathbb{R}^n$ , wenn es ein offenes  $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$  gibt, so dass  $U = M \cap \tilde{U}$ .]

- (2) Jedes solche  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{H}^k$  heißt *Karte* für  $M$ ,  $\alpha^{-1} : \alpha(U) \rightarrow M$  heißt *Parametrisierung* für  $M$ .
- (3) Eine Familie von Karten, deren Definitionsbereiche ganz  $M$  überdecken, heißt *Atlas* für  $M$ .

**Lemma 16.3:** Seien  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{H}^k$ ,  $\beta : V \rightarrow \mathbb{H}^k$  zwei Karten für die  $k$ -dimensionale berandete Untermannigfaltigkeit  $M$  und sei  $x \in U \cap V$ . Dann ist  $\alpha(x) \in \partial\mathbb{H}^k$  genau dann, wenn  $\beta(x) \in \partial\mathbb{H}^k$ .

**Beweis:** Betrachte die Abbildung

$$\alpha \circ \beta^{-1} : \mathbb{H}^k \supset \beta(U \cap V) \xrightarrow{\beta^{-1}} U \cap V \xrightarrow{\alpha} \alpha(U \cap V) \subset \mathbb{H}^k,$$

dann ist  $\alpha \circ \beta^{-1}$  ein Diffeomorphismus von offenen Teilmengen von  $\mathbb{H}^k$  auf offenen Teilmengen von  $\mathbb{H}^k$ . Da das Differential verschieden von 0 ist, ist  $\alpha \circ \beta^{-1}$  lokal invertierbar in einer Umgebung von  $\mathbb{R}^k$ , d. h. innere Punkte von  $\mathbb{H}^k$  können nicht auf  $\partial\mathbb{H}^k$  abgebildet werden, d. h.  $\alpha \circ \beta^{-1}$  bildet  $\partial\mathbb{H}^k$  auf  $\partial\mathbb{H}^k$  ab. Ist also  $\beta(x) \in \partial\mathbb{H}^k$ , dann gilt  $\alpha(x) = \alpha \circ \beta^{-1}(\beta(x)) \in \partial\mathbb{H}^k$ . ■

**Definition 16.4:** Sei  $M$  eine  $k$ -dimensionale berandete Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ . Die Punkte  $x \in M$ , die von einer (und somit von allen) Karte(n) in  $\partial\mathbb{H}^k$  abgebildet werden, heißen *Randpunkte* von  $M$ . Die Menge dieser Punkte heißt der *Rand* von  $M$  und wird mit  $\partial M$  bezeichnet.

**Bemerkung 16.5:** (1) Der Rand  $\partial M$  ist leer oder eine  $(k-1)$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit.

## II. Vektoranalysis

- (2)  $\partial M$  ist *nicht* der topologische Rand bezüglich der Einbettung im  $\mathbb{R}^n$ . Sei zum Beispiel  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  eine eindimensionale berandete Mannigfaltigkeit. Eingebettet im  $\mathbb{R}^2$  ist  $I \cap \overline{\mathbb{R}^2} \setminus \overline{I} = I$  der topologische Rand, der Rand  $\partial I$  im Sinne unserer Definition ist aber  $\{a, b\}$ .
- (3) Da  $\alpha|_{\partial M} : U \cap \partial M \rightarrow \partial \mathbb{H}^k \cong \mathbb{R}^{k-1}$  ein Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^{k-1}$  ist, ist  $\partial M$  auch  $(k-1)$ -dimensional, aber  $\partial M$  selbst hat keinen Rand:  $\partial(\partial M) = \emptyset$ .

**Satz 16.6 (Zerlegung der Eins):** Seien  $M \subset \mathbb{R}^m$  eine kompakte berandete  $k$ -dimensionale Untermannigfaltigkeit und  $(\alpha_t : U_t \rightarrow \mathbb{H}^k)_{t \in I}$  ein Atlas für  $M$  mit einer beliebigen Indexmenge  $I$ . Dann gibt es endlich viele stetig differenzierbare Funktionen  $\lambda_1, \dots, \lambda_m : M \rightarrow [0, 1]$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) Für  $1 \leq i \leq n$  gibt es ein  $t \in I$ , so dass

$$\text{supp}(\lambda_i) = \overline{\{x \in M \mid \lambda_i(x) \neq 0\}} \subset U_t.$$

- (2) Für jedes  $x \in M$  gilt:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i(x) = 1.$$

**Beweis:** (1) Für ein offenes  $V \subset \mathbb{H}^k$ ,  $x \in V$  gibt es (unendlich oft) stetig differenzierbare Funktionen  $f : \mathbb{H}^k \rightarrow [0, 1]$  mit  $f(x) = 1$ ,  $\text{supp}(f) \subset V$ . Für  $k = 1$  wähle „Reskalierung“ von

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{1-x^2}) & |x| < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für  $k > 1$  wähle Produkte von solchen Funktionen für alle Koordinatenrichtungen.

- (2) Wähle für  $x \in M$  eine Karte  $\alpha_{t(x)}$  mit  $x \in U_{t(x)}$ , dann ist  $\alpha_{t(x)}(U_{t(x)}) \subset \mathbb{H}^k$  offen, nach (1) existieren also  $f_x : \mathbb{H}^k \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f_x(\alpha_{t(x)}(x)) = 1$  mit  $f_x \geq 0$  so dass  $\text{supp}(f_x) \subset \alpha_{t(x)}(U_{t(x)})$ . Setze

$$\tilde{\lambda}_x(y) := \begin{cases} f_x(\alpha_{t(x)}(y)) & y \in U_{t(x)}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die so gewählten  $\tilde{\lambda}_x : M \rightarrow \mathbb{R}$  haben die Eigenschaften

- (i)  $\text{supp}(\tilde{\lambda}_x)$  liegt in einer Karte (nämlich in  $U_{t(x)}$ ),  
(ii)  $\tilde{\lambda}_x(x) = 1$  und  $\tilde{\lambda}_x \geq 0$ .

Setze nun  $V_x := \{y \mid \tilde{\lambda}_x(y) > 0\}$ ; diese  $V_x$  sind offen und nichtleer, da  $x \in V_x$ . Damit gilt natürlich, dass  $\{V_x \mid x \in M\}$  eine offene Überdeckung von  $M$  ist. Nun gibt es aber eine endliche Teilüberdeckung von  $M$ , da  $M$  kompakt ist, also existieren  $x_1, \dots, x_m$  mit

$$M = \bigcup_{i=1}^m V_{x_i}.$$



Nun setzen wir  $\sigma := \tilde{\lambda}_{x_1} + \cdots + \tilde{\lambda}_{x_m}$ . Es gilt  $\sigma > 0$  überall auf  $M$  wegen der Definition der  $\tilde{\lambda}_{x_i}$ , d. h. wir können definieren:  $\lambda_i := \frac{1}{\sigma} \tilde{\lambda}_{x_i}$ . Damit haben wir dann aber

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$$

und  $\text{supp}(\lambda_i) = \text{supp}(\tilde{\lambda}_{x_i}) \subset U_{t(x_i)}$  liegt in nur einer Karte. ■

**Bemerkung 16.7:** Bis jetzt haben wir das Integral über Differentialformen nur für eine Karte bzw. Parametrisierung definiert. Mit der Zerlegung der Eins können wir das Integral über die ganze *kompakte* Untermannigfaltigkeit zusammensetzen:

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^m \int_M \lambda_i \omega = \sum_{i=1}^m \int_{\varphi_i} \lambda_i \omega,$$

wobei  $\varphi_i = \alpha_{t(x)}^{-1}$  die Parametrisierung der Karte ist, auf der  $\lambda_i \omega$  lebt.

Es bleibt natürlich zu zeigen, dass diese Definition unabhängig von der Wahl der Karten und der gewählten Zerlegung der Eins ist. Dies folgt im wesentlichen wie in [Satz 15.4](#) mit Hilfe der Transformationsformel. Allerdings bekommt man dort eventuell einen Vorzeichenwechsel und für eine sinnvolle Theorie sollte man in der Lage sein, dieses Vorzeichen über den ganzen Atlas hinweg zu kontrollieren. Dies geht nur für „orientierbare“ Mannigfaltigkeiten.

## 17. Orientierung von Mannigfaltigkeiten und ihren Rändern

**Definition 17.1:** (1) Ein Atlas  $(\alpha_t : U_t \rightarrow \mathbb{H}^k)_{t \in I}$  von  $M$  heißt *orientiert*, wenn für je zwei Karten  $\alpha_t$  und  $\alpha_s$  der Kartenwechsel  $\Theta := \alpha_t \circ \alpha_s^{-1}|_{\alpha_s(U_s \cap U_t)}$ ,

$$\Theta : \mathbb{H}^k \supset \alpha_s(U_s \cap U_t) \xrightarrow{\alpha_s^{-1}} U_s \cap U_t \xrightarrow{\alpha_t} \alpha_t(U_s \cap U_t) \subset \mathbb{H}^k$$

positive Funktionaldeterminante hat, d. h.  $\det(\Theta'(x)) > 0 \forall x \in \alpha_s(U_s \cap U_t)$ .

- (2) Eine *orientierte Mannigfaltigkeit* ist eine Mannigfaltigkeit zusammen mit einem orientiertem Atlas.
- (3) Eine Mannigfaltigkeit heißt *orientierbar*, falls sie einen orientierten Atlas besitzt.

**Bemerkung 17.2:** (1) Orientierbarkeit von  $M$  heißt, dass man in einer konsistenten Art eine positiv orientierte Basis stetig im Tangentialraum von  $M$  auswählen kann.

- (2) Falls  $M \subset \mathbb{R}^n$  ( $n - 1$ )-dimensional ist, so ist  $M$  orientierbar, falls man in konsistenter Art einen Normalenvektor stetig auf  $M$  auszeichnen kann, d. h. man kann konsistent das „Innere“ vom „Äußeren“ von  $M$  unterscheiden. Zum Beispiel die Kugeloberfläche  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  ist orientierbar, aber das Möbiusband ist nicht orientierbar.
- (3) Für eine Karte  $\alpha : U \rightarrow \mathbb{H}^k$  von  $M$ ,  $U \subset M$  offen mit  $U \cap \partial M \neq \emptyset$  ist  $\alpha|_{U \cap \partial M} : U \cap \partial M \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}$  eine Karte für den Rand. Gleichorientierte Karten für  $M$  liefern gleichorientierte Karten für  $\partial M$ , und ein orientierter Atlas von  $M$  induziert durch Einschränkung auf den Rand einen orientierten Atlas für  $\partial M$ . Also: Orientierung auf  $M$  induziert Orientierung auf  $\partial M$ .

**Definition 17.3:** Sei  $M$  eine  $k$ -dimensionale kompakte orientierbare Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ . Dann gibt es einen orientierten Atlas und eine dazugehörige Zerlegung der Eins  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  gemäß [Satz 16.6](#). Wir definieren dann für eine  $k$ -Form  $\omega$  auf  $M$  ihr Integral über  $M$  als

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^n \int_M \lambda_i \omega := \sum_{i=1}^n \int_{\varphi_i} \lambda_i \omega$$

wobei  $\varphi_i := \alpha_{t_i}^{-1}$  die Parametrisierung der zu  $\lambda_i$  gehörigen Karte ist.

**Bemerkung 17.4:** Man zeigt dann, dass diese Definition von den gemachten Wahlen unabhängig ist:

- (1) Unabhängigkeit von der Wahl der Zerlegung der Eins,
- (2) Unabhängigkeit von der Wahl des orientierten Atlas bis auf ein globales Vorzeichen.

## 18. Der allgemeine Satz von Stokes

**Satz 18.1 (von Stokes):** Sei  $M$  eine  $k$ -dimensionale kompakte orientierte berandete Untermannigfaltigkeit von  $\mathbb{R}^n$ . Der Rand trage die induzierte Randorientierung. Des Weiteren sei  $\omega$  eine  $(k-1)$ -Form auf  $M$ . Dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Insbesondere gilt: Hat  $M$  keinen Rand, d.h.  $\partial M = \emptyset$ , so ist  $\int_M d\omega = 0$ .

**Beweis:** (1) Wir beweisen die Behauptung zunächst in einer Karte, d. h.  $\omega$  sei eine  $(k-1)$ -Form auf  $\mathbb{R}^k$  mit kompaktem Träger. Dann gilt:

$$\int_{\mathbb{H}^k} d\omega = \int_{\partial\mathbb{H}^k} \omega.$$

(Die Parametrisierung von  $\mathbb{H}^k$  ist hier die identische Abbildung.) Dies sieht man folgendermaßen: Sei

$$\omega = \sum_{j=1}^k f_j dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_k.$$

Dann ist die äußere Ableitung

$$d\omega = \sum_{j=1}^k \sum_{r=1}^k \frac{\partial f_j}{\partial x_r} dx_r dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_k = \sum_{j=1}^k \frac{\partial f_j}{\partial x_j} (-1)^{j-1} dx_1 \cdots dx_k,$$

also ist

$$\int_{\mathbb{H}^k} d\omega = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \int_{\mathbb{H}^k} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_1 \cdots dx_k. \quad (\text{II.3})$$

Gemäß des Satzes von Fubini integrieren wir [Gl. \(II.3\)](#) erst über die  $j$ -te Variable, dafür gilt dann:

(i)  $j = k$ : In diesem Fall lautet das Integral

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\partial f_k}{\partial x_k} dx_k &= f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, \infty) - f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, 0) \\ &= -f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, 0) \end{aligned}$$

wegen dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und weil  $f$  kompakten Träger hat.

(ii)  $j \neq k$ : In diesem Fall lautet das Integral

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\partial f_j}{\partial x_j} dx_j = f_j(x_1, \dots, x_{k-1}, \infty) - f_j(x_1, \dots, x_{k-1}, -\infty) = 0$$

mit der selben Begründung wie in (i).

## II. Vektoranalysis

Insgesamt haben wir also

$$\int_{\mathbb{H}^k} d\omega = (-1)^k \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, 0) dx_1 \cdots dx_{k-1}.$$

Nun kümmern wir uns um  $\int_{\partial\mathbb{H}^k} \omega$ . Dazu brauchen wir eine Parametrisierung von  $\partial\mathbb{H}^k$  als  $(k-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, wir nehmen zu diesem Zweck die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^{k-1} &\longrightarrow \mathbb{H}^k \\ (x_1, \dots, x_{k-1}) &\longmapsto (x_1, \dots, x_{k-1}, 0). \end{aligned}$$

Da  $\varphi^*(dx_k) = 0$ , überlebt in  $\varphi^*(\omega)$  nur der Term mit  $j = k$ , d. h.

$$\varphi^*\omega = \varphi^*(f_k)\varphi^*(dx_1) \cdots \varphi^*(dx_{k-1}) = f_k \circ \varphi dx_1 \cdots dx_{k-1}.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\partial\mathbb{H}^k} \omega &= \pm \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \varphi^*\omega \\ &= \pm \int f_k(x_1, \dots, x_{k-1}, 0) dx_1 \cdots dx_{k-1}. \end{aligned}$$

Aus der induzierten Randabbildung erhalten wir als Vorzeichen  $(-1)^k$ .

- (2) Die Aussage gilt, falls der Träger von  $\omega$  ganz in einer Karte liegt, da sich diese Situation durch den Rückzug genau auf (1) zurückführen lässt.
- (3) Im allgemeinen Fall wählen wir zunächst einen orientierten Atlas und dazu eine Zerlegung der Eins  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ . Dann gilt der Satz nach (2) für jedes  $\lambda_i\omega$ , d. h.

$$\int_M d(\lambda_i\omega) = \int_{\partial M} \lambda_i\omega.$$

Summieren aller  $m$  Gleichungen liefert

$$\sum_{i=1}^m \int_M d(\lambda_i\omega) = \sum_{i=1}^m \int_{\partial M} \lambda_i\omega = \int_{\partial M} \left( \sum_{i=1}^m \lambda_i \right) \omega = \int_{\partial M} \omega$$

wegen den Eigenschaften der Zerlegung der Eins. Für die linke Seite gilt

$$d(\lambda_i\omega) = d\lambda_i \wedge \omega + \lambda_i \wedge d\omega.$$

Da  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$  gilt, ist  $\sum_{i=1}^m d\lambda_i = d1 = 0$ , also gilt insgesamt

$$\sum_{i=1}^m \int_M d(\lambda_i\omega) = \int_M \left( \sum_{i=1}^m d\lambda_i \wedge \omega + \sum_{i=1}^m \lambda_i d\omega \right) = \int_M d\omega,$$

was den Beweis beschließt. ■

**Bemerkung 18.2:** (1) Für nicht kompakte  $M$  gilt der Satz nicht in dieser Allgemeinheit, man braucht dann Voraussetzungen, die die Randterme bei der partiellen Integration verschwinden lassen.

- (2) Man kann den Stokes'schen Satz auch verallgemeinern für Mannigfaltigkeiten  $M$ , wo der Rand auch „Ecken“ haben darf (von niedrigerer Dimension), z. B. für den Würfel.

**Bemerkung 18.3:** (1) Eine  $p$ -Form  $\omega$  auf einer  $k$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M \subset \mathbb{R}^n$  ist nach unserer Definition eine alternierende Multilinearform auf  $\mathbb{R}^n$ , d. h. die  $p$  Argumente von  $\omega(x)$  können Vektoren aus  $\mathbb{R}^n$  sein. Allerdings benutzen wir im allen konkreten Rechnungen nur die bzgl. einer Parametrisierung  $\varphi : I \rightarrow M$  zurückgeholte Form  $\varphi^*\omega$ , und für die gilt

$$\varphi^*\omega(x)(v_1, \dots, v_p) = \omega(\varphi(x))(\varphi'(x) \cdot v_1, \dots, \varphi'(x) \cdot v_p),$$

Die dort auftauchenden Argumente von  $\omega(\varphi(x))$  leben alle im *Tangentialraum* von  $M$  am Punkt  $\varphi(x)$ . Somit sind die  $p$ -Formen auf  $M$  eigentlich alternierende Multilinearformen auf dem Tangentialraum.

- (2) Ist  $M \subset \mathbb{R}^n$   $k$ -dimensional, so ist auch die Dimension des Tangentialraums  $k$ , d. h. effektiv sind  $p$ -Formen auf  $M$  mit  $p > k$  gleich Null.

**Satz 18.4 (Retraktionssatz):** Sei  $\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$  die  $n$ -dimensionale abgeschlossene Einheitskugel mit Rand  $\partial\mathbb{B}^n = \mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ . Dann gibt es keine zweimal stetig differenzierbare Abbildung  $\Phi : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , so dass  $\Phi(\mathbb{B}^n) \subset \partial\mathbb{B}^n = \mathbb{S}^{n-1}$  und  $\Phi|_{\partial\mathbb{B}^n} = \text{id}$ .

**Beweis:** Sei  $\Phi$  eine solche Abbildung. Betrachte die  $(n-1)$ -Form  $\omega = x_1 dx_2 \cdots dx_n$  auf  $\mathbb{R}^n$  mit der äußeren Ableitung  $d\omega = dx_1 \cdots dx_n$ . Der Rückzug  $\Phi^*(d\omega)$  ist dann eine  $n$ -Form auf dem  $(n-1)$ -dimensionalen Tangentialraum von  $\mathbb{S}^{n-1}$ , also gilt  $\Phi^*(d\omega) = 0$ . Nach dem Satz von Stokes gilt dann

$$\int_{\partial\mathbb{B}^n} \Phi^*\omega = \int_{\mathbb{B}^n} d\Phi^*(\omega) = \int_{\mathbb{B}^n} \Phi^*(d\omega) = 0.$$

Da aber  $\Phi|_{\partial\mathbb{B}^n} = \text{id}$  müsste gelten  $\Phi^*\omega|_{\partial\mathbb{B}^n} = \omega|_{\partial\mathbb{B}^n} = x_1 dx_1 \cdots dx_n|_{\partial\mathbb{B}^n}$ , also

$$0 = \int_{\partial\mathbb{B}^n} \Phi^*\omega = \int_{\partial\mathbb{B}^n} \omega = \int_{\mathbb{B}^n} d\omega = \int_{\mathbb{B}^n} dx_1 \cdots dx_n = \text{vol}(\mathbb{B}^n).$$

Das kann offensichtlich nicht gelten, also kann es kein solches  $\Phi$  geben. ■

**Korollar 18.5 (Brouwer'scher Fixpunktsatz):** Jede stetige Abbildung  $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$  der abgeschlossenen Einheitskugel im  $\mathbb{R}^n$  in sich besitzt mindestens einen Fixpunkt.

**Beweis:** (1) Durch den Weierstrass'schen Approximationssatz wird der stetige Fall auf den Fall von Polynomen zurückgeführt. Da Polynome beliebig oft differenzierbar sind, sind sie insbesondere zweimal differenzierbar.

- (2) Für zweimal stetig differenzierbares  $f$  ergibt sich die Behauptung aus dem Retraktionssatz wie folgt: Sei  $f$  wie im Satz und  $f$  habe keine Fixpunkte. Definiere dann  $\Phi$  durch  $\Phi(x) = \text{Schnittpunkt von } \overline{f(x)x} \text{ mit } \partial\mathbb{B}^n$ . Insbesondere ist  $\Phi(x) = x$  für  $x \in \partial\mathbb{B}^n$ . Dann hat  $\Phi$  die Eigenschaften aus dem Retraktionssatz, kann also nicht existieren, also muss  $f$  einen Fixpunkt haben. ■

## 19. Und zu guter Letzt: de Rham Kohomologie

Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und

$$\Omega^p(M) := \text{Vektorraum aller glatten } p\text{-Formen auf } M,$$

wobei

$$\Omega^0(M) = \text{Funktionen auf } M.$$

Mit dem Ableitungsoperator

$$\Omega^p(M) \xrightarrow{d} \Omega^{p+1}(M)$$

haben wir dann einen sogenannten *Ko-Kettenkomplex*

$$0 \rightarrow \Omega(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^{k-1}(M) \xrightarrow{d} \Omega^k(M) \rightarrow 0$$

(wobei  $k = \dim M$ ), d. h. es gilt überall:  $d^2 = 0$ . Also:  $\omega = d\alpha \Rightarrow d\omega = 0$ , oder äquivalent:

$$\text{Bild}(d : \Omega^{p-1} \rightarrow \Omega^p) \subset \text{Kern}(d : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1}).$$

Die Inklusion muss dabei im Allgemeinen nicht eine Gleichheit sein; falls dies gilt, dann heißt der Komplex an der Stelle *exakt*. Nach dem Lemma von Poincaré gilt dies für alle  $p$  für sternförmige Gebiete, also z. B. für  $M = \mathbb{R}^2$ . Sternförmige Gebiete sind topologisch trivial; falls die Topologie von  $M$  nicht trivial ist, so enthält die Abweichung von  $\text{Bild} = \text{Kern}$  Information über die Topologie von  $M$ .

**Beispiel 19.1:** Betrachte  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Dann haben wir gesehen, dass

$$\omega_0 := \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$$

geschlossen ist, d. h.  $d\omega_0 = 0$ , aber nicht exakt ist, d. h. es gibt kein  $\alpha$  mit  $\omega_0 = d\alpha$ . Also haben wir hier:

$$\omega_0 \in \text{Kern}(d), \quad \text{aber} \quad \omega_0 \notin \text{Bild}(d).$$

Es stellt sich nun die Frage: Wie viele verschiedene solche geschlossene, aber nicht exakte  $\omega$  gibt es?

Zunächst gibt es triviale Variationen von  $\omega_0$ . Sei nämlich

$$\omega_1 = \omega_0 + d\alpha.$$

Dann gilt

$$d\omega_1 = d\omega_0 + d^2\alpha = 0 + 0 = 0,$$

und  $\omega_1$  ist nicht exakt, da sonst  $\omega_0$  exakt wäre:

$$\omega_1 = d\beta \Rightarrow \omega_0 = \omega_1 - d\alpha = d(\beta - \alpha).$$

Somit hat jedes  $\omega_1 = \omega_0 + d\alpha$  die gleichen Eigenschaften (geschlossen, aber nicht exakt) wie  $\omega_0$ , aber diese  $\omega_1$  sind nur triviale Modifikationen von  $\omega_0$ :

$$\omega_1 \hat{=} \omega_0 \Leftrightarrow \omega_1 - \omega_0 = d\alpha \in \text{Bild}(d).$$

Um dies zu formalisieren gehen wir über zu

$$\text{Kern}(d)/\text{Bild}(d)$$

und bezeichnen die Äquivalenzklasse von  $\omega$  mit  $[\omega]$ . Dann gilt

$$[\omega_0 + d\alpha] = [\omega_0] \neq 0.$$

Obige Frage nach der Anzahl der geschlossenen, aber nicht exakten  $\omega$  können wir nun präzisieren als die Frage nach der Größe von  $\text{Kern}(d)/\text{Bild}(d)$ .

Sei  $\omega \in \Omega^1(M)$  mit  $d\omega = 0$ . Betrachte zwei einfache geschlossene Kurven  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ , die 0 umschließen. Dann ist

$$\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\partial\Gamma} \omega = \int_{\Gamma} d\omega = 0$$

(hierbei ist  $\Gamma$  das Gebiet mit  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  als Rand, und im letzten Schritt haben wir den Satz von Stokes benutzt), also

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega.$$

Das Integral von  $\omega$  über eine solche geschlossen Kurve um die 0 ist also von der speziellen Wahl der Kurve unabhängig. Wir können deshalb als Kurve den Einheitskreis  $\gamma = \mathbb{S}^1$  wählen. Wir behaupten nun, dass gilt:

$$\omega \text{ exakt} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\gamma} \omega = 0.$$

**Beweis:** Sei  $\omega$  exakt, also  $\omega = d\alpha$ ; dann gilt

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} d\alpha = \int_{\partial\gamma} \alpha = 0,$$

da  $\partial\gamma = \emptyset$ .

Für die andere Richtung versuchen wir für gegebenes  $\omega$  mit verschwindendem Integral über  $\gamma$  eine Stammfunktion  $\alpha$  durch Integrieren zu finden. Dazu fixieren wir einen beliebigen Anfangspunkt  $x_0$  und definieren

$$\alpha(x) := \int_{\gamma_x} \omega,$$

wobei  $\gamma_x$  eine Kurve zwischen  $x_0$  und  $x$  ist. Diese Definition ist nach unserer Voraussetzung unabhängig von der gewählten Kurve. Man sieht dann leicht, dass  $d\alpha = \omega$  gilt. ■

## II. Vektoranalysis

Beachte: Für unser  $\omega_0$  haben wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^1} \omega_0 &= \int_{\gamma} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{-\sin t \cdot (-\sin t) dt + \cos t \cdot \cos t dt}{\sin^2 t + \cos^2 t} \\ &= \int_0^{2\pi} dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Wir behaupten nun dass gilt: Jede geschlossene 1-Form  $\omega \in \Omega^1(M)$  ist von der Form

$$\omega = \lambda\omega_0 + d\alpha \quad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R}, \alpha \in \Omega^0(M)$$

**Beweis:** Sei  $\omega \in \Omega^1(M)$  mit  $d\omega = 0$ . Setze

$$\lambda := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}^1} \omega \quad \text{und} \quad \tilde{\omega} := \omega - \lambda\omega_0.$$

Dann gilt

$$\int_{\mathbb{S}^1} \tilde{\omega} = \underbrace{\int_{\mathbb{S}^1} \omega}_{2\pi\lambda} - \lambda \underbrace{\int_{\mathbb{S}^1} \omega_0}_{2\pi} = 0.$$

Somit ist  $\tilde{\omega}$  exakt, also  $\tilde{\omega} = d\alpha$  für ein  $\alpha \in \Omega^0(M)$ . Damit haben wir

$$\omega = \tilde{\omega} + \lambda\omega_0 = d\alpha + \lambda\omega_0. \quad \blacksquare$$

Somit gilt

$$\frac{\text{Kern}(d : \Omega^1 \rightarrow \Omega^2)}{\text{Bild}(d : \Omega^0 \rightarrow \Omega^1)} \cong \mathbb{R}\omega_0,$$

d. h. der Quotient ist eindimensional, mit Basis  $\omega_0$ .

**Definition 19.2:** Wir definieren allgemein die  $p$ -te *de Rham Kohomologie* als Vektorraum

$$H^p(M) := \frac{\text{Kern}(d : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1})}{\text{Bild}(d : \Omega^{p-1} \rightarrow \Omega^p)}$$

mit der Quotientenabbildung

$$\begin{aligned} \{\Omega^p(M) \mid d\omega = 0\} &\longrightarrow H^p(M) \\ \omega &\longmapsto [\omega]. \end{aligned}$$

$[\omega]$  heißt die *Kohomologieklass*e von  $\omega$ . Die Dimension

$$b^p(M) := \dim H^p(M)$$

heißt die  $p$ -te *Betti-Zahl* von  $M$ . Die de Rham Kohomologie von  $M$  ist dann

$$H^*(M) := \bigoplus_p H^p(M).$$



Eine wichtige Tatsache ist, dass  $H^*(M)$  nicht nur ein Vektorraum ist, sondern dass sich das äußere Produkt  $\wedge$  auf  $H^*(M)$  überträgt und es zu einer Algebra macht. Dazu definieren wir

$$[\alpha] \wedge [\beta] := [\alpha \wedge \beta].$$

Man sieht leicht, dass dies wohldefiniert und insbesondere auch unabhängig von den gewählten Repräsentanten ist.

Weiterhin induzieren glatte Abbildungen  $f : M \rightarrow N$  lineare Abbildungen

$$\begin{aligned} f^* : H^p(N) &\longrightarrow H^p(M) \\ [\omega] &\longmapsto f^*[\omega] := [f^*\omega] \end{aligned}$$

Man hat die wichtige Homotopieinvarianz der Kohomologie!

**Definition 19.3:** Glatte  $f, g : M \rightarrow N$  heißen *homotop*, falls es eine glatte Funktion  $h : M \times [0, 1] \rightarrow N$  gibt mit  $h(x, 0) = f(x)$  und  $h(x, 1) = g(x)$ . Wir schreiben:  $f \sim g$ .

Dann gilt: Aus  $f \sim g : M \rightarrow N$  folgt dass gilt:

$$f^* = g^* : H^p(N) \longrightarrow H^p(M) \quad \forall p.$$

Das Rechnen mit (Ko)Kettenkomplexen und Homologien wird in der homologischen Algebra systematisiert. Diese wurde im wesentlichen im Rahmen der Topologie eingeführt. Die de Rham Kohomologie gibt dem ganzen eine analytische Komponente und verbindet Analysis und Topologie. Die Weiterverfolgung solcher Zusammenhänge zwischen Topologie und Analysis gipfelt in einigen der tiefsten Resultate der modernen Mathematik, wie z. B. dem Indexsatz von Atiyah und Singer.