UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Stefan Jung

Übungen zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2016/2017

Blatt 1
Abgabe: Donnerstag, 03.11.2016, 12:00 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $\mathcal{M}$ die (bezüglich Inklusion) kleinste σ-Algebra auf X, die die Teilmengen $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$ und $\{3, 4, 5, 6\}$ enthält. Man beschreibe $\mathcal{M}$. Gehört $\{2, 4\}$ zu $\mathcal{M}$? Finden Sie alle Maße μ auf $\mathcal{M}$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei X eine Menge und sei $\wp(X)$ ihre Potenzmenge. Eine Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \wp(X)$ heißt *Algebra*, falls gilt:

(i) $X \in \mathcal{A}$.

(ii) Für $A \in \mathcal{A}$ ist auch $X \backslash A \in \mathcal{A}$.

(iii) Für $A, B \in \mathcal{A}$ ist auch $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{A} := \{A \subseteq X |\ A \text{ endlich oder } X \backslash A \text{ endlich}\}$ ist eine Algebra.

(b) Die Algebra $\mathcal{A}$ aus Aufgabenteil (a) ist genau dann eine σ-Algebra, wenn X eine endliche Menge ist.

(c) Ist $\mathcal{A}$ eine beliebige Algebra, so gehört die *symmetrische Differenz*

$$A \Delta B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$$

zweier Elemente $A, B \in \mathcal{A}$ ebenfalls zu $\mathcal{A}$.

bitte wenden

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung zwischen zwei Mengen X und Y. Zeigen Sie:

(a) Ist $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra auf Y, so stellt

$$\mathcal{A} := \{f^{-1}(B) |\ B \in \mathcal{B}\} \subseteq \wp(X)$$

eine σ-Algebra auf X dar.

(b) Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf X, so stellt

$$\mathcal{B} := \{B |\ f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\} \subseteq \wp(Y)$$

eine σ-Algebra auf Y dar.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Jede σ-Algebra enthält entweder endlich viele oder überabzählbar unendlich viele Elemente.

Hinweis: Gehen Sie von einer abzählbaren σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf einer Menge X aus und führen Sie die Annahme, dass $\mathcal{A}$ nicht endlich ist, durch die Konstruktion einer injektiven Abbildung $\Phi : \wp(\mathbb{N}) \to \mathcal{A}$ zu einem Widerspruch. Betrachten Sie dazu die Mengen

$$M_x := \bigcap_{B \in \mathcal{A}:\ x \in B} B \qquad \text{mit } x \in X$$

und zeigen Sie:

- Ist $M_x \cap M_y \neq \emptyset$ für $x, y \in X$, so gilt bereits $M_x = M_y$.
- Für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt $A = \bigcup_{x \in A} M_x$.