UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Stefan Jung

Übungen zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2016/2017

Blatt 2
Abgabe: Donnerstag, 10.11.2016, 12:00 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra und μ ein Maß auf $\mathfrak{A}$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Für alle $A, B \in \mathfrak{A}$ gilt

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(b) Für alle $A, B \in \mathfrak{A}$ gilt

$$A \subseteq B \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(A) \leq \mu(B).$$

(c) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Mengen aus $\mathfrak{A}$, so gilt

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$. Seien weiter eine Familie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen aus $\mathfrak{A}$ und $A \in \mathfrak{A}$ gegeben. Zeigen Sie:

(a) Aus $A_n \nearrow A$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A).$$

(b) Aus $A_n \searrow A$ und $\mu(A_1) < \infty$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A).$$

bitte wenden

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Wir betrachten den messbaren Raum $(\mathbb{N}, \wp(\mathbb{N}))$. Zeigen Sie:

(a) Durch

$$\mu: \ \wp(\mathbb{N}) \to [0, \infty], \ A \mapsto \begin{cases} |A|, & \text{falls } A \text{ endlich} \\ \infty, & \text{sonst} \end{cases}$$

wird ein Maß auf $\wp(\mathbb{N})$ (das sogenannte *Zählmaß*) definiert. Mit $|A|$ bezeichnen wir dabei die Anzahl der Elemente einer endlichen Menge $A \in \wp(\mathbb{N})$.

(b) In Aufgabe 2 (b) kann auf die Forderung $\mu(A_1) < \infty$ nicht verzichtet werden.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ und seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A_i) < \infty$ für alle $i = 1, \ldots, n$ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mu(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$