UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Stefan Jung

Übungen zur Vorlesung Analysis III

Wintersemester 2016/2017

Blatt 4

Abgabe: Donnerstag, 24.11.2016, 12:00 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Erinnerung: Riemann-Integral
Seien $a \leq b \in \mathbb{R}$. Eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ des Intervalls $[a,b]$ ist ein Vektor $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = b$. Es bezeichne $\mathcal{Z}([a,b])$ die Menge aller Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$. Es sei nun $[a,b] \subseteq X \subseteq \mathbb{R}$ und $f : X \to \mathbb{R}$ eine auf $[a,b]$ beschränkte Funktion. Wir definieren für $\mathcal{Z} = (x_0, \dots, x_n) \in \mathcal{Z}[a,b]$ die Unter- bzw. Obersumme von f bezüglich $\mathcal{Z}$ durch

$$(1)\quad U(f,\mathcal{Z}) := \sum_{k=0}^{k-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot m_k \quad \text{, wobei } m_k := \inf_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} f(x).$$

$$(2)\quad O(f,\mathcal{Z}) := \sum_{k=0}^{k-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot M_k \quad \text{, wobei } M_k := \sup_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} f(x).$$

Im Falle $\inf\limits_{\mathcal{Z} \in \mathcal{Z}([a,b])} O(f,\mathcal{Z}) = \sup\limits_{\mathcal{Z} \in \mathcal{Z}([a,b])} U(f,\mathcal{Z}) \in \mathbb{R}$ nennen wir diesen gemeinsamen Wert das Riemann-Integral von f (auf dem Intervall $[a,b]$) und bezeichnen ihn mit $\int_a^b f(x)dx$.

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Wir setzen

$$\mathfrak{A} := \{A \subseteq \mathbb{R} |\ A \text{ ist Vereinigung von endlich vielen Intervallen}\}$$

und definieren

$$\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty], \ A = \dot{\bigcup_{k=1}^{n}} I_k \mapsto \sum_{k=1}^{n} L(I_k),$$

wobei wir mit

$$L(I) := \sup_{a,b \in I} |a - b|$$

die Länge eines Intervalls $I \subseteq \mathbb{R}$ bezeichnen. Zeigen Sie:

(a) $\mathfrak{A}$ ist eine Algebra und μ ein wohldefiniertes(!) Prämaß auf $\mathfrak{A}$.

bitte wenden

(b) Das von μ induzierte äußere Maß μ^* ist translationsinvariant, d.h. für alle $A \subseteq \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mu^*(x+A) = \mu^*(A), \qquad \text{wobei} \qquad x + A := \{x + a \mid a \in A\}.$$

(c) Die σ-Algebra $\mathfrak{M}_\mu$ der bezüglich μ^* messbaren Mengen ist translationsinvariant, d.h. für alle $A \in \mathfrak{M}_\mu$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $(x + A) \in \mathfrak{M}_\mu$. (Insbesondere ist auch das Lebesgue-Maß $\lambda := \mu^*|_{\mathfrak{M}_\mu}$ translationsinvariant.)

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei λ das auf die σ-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ der Borelmengen von $\mathbb{R}$ eingeschränkte Lebesgue-Maß. Zeigen Sie, dass jede Borel-messbare und Riemann-integrierbare Funktion $f : [a, b] \to [0, \infty)$ auch Lebesgue-integrierbar ist und dass in diesem Fall gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)d\lambda(x)$$

Bemerkung: Die Aussage bleibt auch dann noch gültig, wenn wir auf die Einschränkung $f \geq 0$ verzichten.

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** (a) Bestimmen Sie den Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx.$$

(b) Zeigen Sie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

Hinweis: Schreiben Sie die Summanden als geeignete Integrale.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei μ ein Prämaß auf einer Algebra $\mathfrak{A} \subseteq \wp(X)$ und sei μ^* das von μ induzierte äußere Maß. Zeigen Sie, dass $\mu^*(A) = \mu(A)$ für alle Mengen $A \in \mathfrak{A}$ gilt.

Zusatzaufgabe* (10 Punkte)**.** Konstruieren Sie eine Teilmenge $E \subset \mathbb{R}$, die nicht Lebesgue-messbar ist.

Hinweis: Zur Konstruktion von E benötigen Sie das Auswahlaxiom.