UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Stefan Jung

Übungen zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2016/2017

Blatt 5
Abgabe: Donnerstag, 01.12.2016, 12:00 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Sei $X = (0,1] \cap \mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $\mathfrak{A}$ aller endlichen Vereinigungen von Intervallen der Form $(a,b] \cap \mathbb{Q}$ mit $0 \leq a < b \leq 1$ und $a,b \in \mathbb{Q}$ ist eine Algebra.

(b) Durch $\mu((a,b] \cap \mathbb{Q}) = \infty$ und $\mu(\emptyset) = 0$ wird ein Prämaß μ auf $\mathfrak{A}$ definiert. Wie sieht das von μ induzierte äußere Maß μ^* aus?

(c) Die Fortsetzung von μ auf die kleinste σ-Algebra, die $\mathfrak{A}$ enthält, ist nicht eindeutig.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei $\mu : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty)$ ein endliches Maß. Wir definieren die zugehörige *Verteilungsfunktion* durch

$$F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mu((-\infty, x]).$$

Zeigen Sie:

(a) Die Funktion F_μ ist rechtsseitig stetig, d.h. für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$\lim_{x \searrow x_0} F_\mu(x) = F_\mu(x_0)$$

(b) Die Funktion F_μ ist genau dann an einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ linksseitig stetig, d.h. es gilt

$$\lim_{x \nearrow x_0} F_\mu(x) = F_\mu(x_0),$$

wenn $\mu(\{x_0\}) = 0$ ist.

Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion für

- das Dirac-Maß $\delta_a : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty)$ zu $a \in \mathbb{R}$.
- das Maß
$$\mu : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty),\ A \mapsto \lambda(A \cap [0,1]),$$
wobei λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$ bezeichne.

bitte wenden

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Wir definieren $\mathfrak{I} := \{(a,b] \mid -\infty \leq a < b \leq \infty\}$ und

$$\mathfrak{A} := \{A \subseteq \hat{\mathbb{R}} \mid A \text{ ist Vereinigung von endlich vielen disjunkten Intervallen aus } \mathfrak{I}\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\mathfrak{A}$ ist eine Algebra über $(-\infty, \infty]$.

(b) Ist $h : \hat{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende und rechtsseitig stetige Funktion mit $h(-\infty) = 0$, so ist durch

$$\mu_h : \ \mathfrak{A} \to [0, \infty), \ A = \dot{\bigcup_{k=1}^{n}} I_k \mapsto \sum_{k=1}^{n} L(I_k)$$

mit

$$L : \ \mathfrak{I} \to \mathbb{R}, \ I = (a,b] \mapsto h(b) - h(a)$$

ein wohldefiniertes, endliches Prämaß auf $\mathfrak{A}$ gegeben. Zeigen Sie weiter, dass das durch μ_h induzierte äußere Maß μ_h^* ebenfalls endlich ist und dass alle Borelmengen $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ bereits μ_h-messbar sind.

Wir nennen $\lambda_h := \mu_h^*|_{\mathfrak{B}(\mathbb{R})}$ das *Lebesgue-Stieltjes-Maß* zu h und schreiben für das zugehörige *Lebesgue-Stieltjes-Integral* einer Borel-messbaren Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ kurz

$$\int_{[a,b]} f(x) dh(x) := \int_{[a,b]} f(x) d\lambda_h(x).$$

(c) Ist $h : \hat{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende und rechtsseitig stetige Funktion mit $h(-\infty) = 0$, so ist $F_{\lambda_h} = h|_{\mathbb{R}}$.
Umgekehrt erfüllt F_μ für jedes endliche Maß μ auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ die Voraussetzungen von Aufgabenteil (b) und es gilt $\lambda_{F_\mu} = \mu$.

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei μ ein endliches Maß auf der σ-Algebra $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ der Borelmengen, dessen Verteilungsfunktion $F_\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist. Sei weiter $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Zeigen Sie:

(a) Bezeichnen wir mit λ das Lebesgue-Maß auf $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, so ist durch

$$\nu : \ \mathfrak{B}(I) \to [0, \infty), \ A \mapsto \int_A F'_\mu(x) d\lambda(x)$$

ein endliches Maß auf $\mathfrak{B}(I)$ gegeben.

(b) Es gilt $\mu|_{\mathfrak{B}(I)} = \nu$.

(c) Jede Borel-messbare und Riemann-integrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist auch μ-integrierbar und es gilt

$$\int_{[a,b]} f(x) d\mu(x) = \int_a^b f(x) F'_\mu(x) dx.$$