UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Stefan Jung

Übungen zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2016/2017

Blatt 6
Abgabe: Donnerstag, 8.12.2016,12:00 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Gegeben sei ein lokalkompakter Raum X sowie der $\mathbb{C}$-Vektorraum

$$C_b(X) := \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}$$

versehen mit der Supremumsnorm $\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|$. Wir betrachten $C_c(X)$ und $C_0(X)$ als Teilmengen von $C_b(X)$.

(a) Zeigen Sie, dass der Abschluss von $C_c(X)$ bezüglich der Supremumsnorm durch $C_0(X)$ gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, dass $C_0(X)$ vollständig ist.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Verwenden Sie den Satz von Fubini sowie die Beziehung

$$\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xt} dt \qquad \text{für } x > 0,$$

um zu zeigen, dass

$$\lim_{R\to\infty} \int_0^R \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei K der Durchschnitt der beiden Zylinder

$$Z_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ x^2 + z^2 \leq 1\} \qquad \text{und} \qquad Z_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\ y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Berechnen Sie das Volumen von K.

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, also ein Maßraum mit der Eigenschaft $\mu(X) = 1$, und sei $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine auf dem Intervall $I := [a, b]$ konvexe Funktion, d.h. für alle $x, y \in I$ gelte

$$\varphi\big((1-t)x + ty\big) \leq (1-t)\varphi(x) + t\varphi(y) \qquad \text{für alle } t \in [0, 1].$$

Zeigen Sie:

(a) $\varphi|_{(a,b)}$ ist stetig. Insbesondere ist φ Borel-messbar.

(b) Für eine μ-integrierbare Funktion $f : X \to I$ ist $\int_X f(x)d\mu(x) \in I$ und es gilt

$$\varphi\Big(\int_X f(x)d\mu(x)\Big) \leq \int_X \varphi(f(x))d\mu(x).$$