**UNIVERSITÄT DES SAARLANDES**
**FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK**
Prof. Dr. Roland Speicher
Stefan Jung

**Übungen zur Vorlesung Analysis III**
Wintersemester 2016/2017

**Blatt 8**
**Abgabe:** Donnerstag, 05.01.2017, 12:00 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

---

**Aufgabe 1** (10 Punkte). In der Analysis II wurde gezeigt: Für jede auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \qquad \text{für alle } (x_0, y_0) \in \Omega.$$

Geben Sie hierfür mit Hilfe des Satzes von Fubini einen neuen Beweis.

**Hinweis:** Integrieren Sie beide Seiten über eine geeignete Menge und schließen Sie indirekt.

**Aufgabe 2** (10 Punkte).

(a) Zeigen Sie: Ist $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(X) < \infty$ und sind $1 \leq p \leq q \leq \infty$ gegeben, so gilt $L^p(\mu) \supseteq L^q(\mu)$.

(b) Geben Sie ein Beispiel eines Maßraums $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ an, in dem für $1 \leq p < q \leq \infty$ die umgekehrte Inklusion $L^p(\mu) \subsetneqq L^q(\mu)$ gilt.

(c) Geben Sie auch ein Beispiel eines Maßraums $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ an, in dem für $1 \leq p < q \leq \infty$ weder $L^p(\mu) \subseteq L^q(\mu)$ noch $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$ erfüllt ist.

**Aufgabe 3** (10 Punkte). Sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $f \in L^\infty(\mu)$ gilt

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

(b) Sei $f \in \bigcap_{p>1} L^p(\mu)$ gegeben, so dass $\lim\limits_{p \to \infty} \|f\|_p$ in $\mathbb{R}$ existiert. Muss dann schon $f \in L^\infty(\mu)$ gelten?

*bitte wenden*

**Aufgabe 4** (10 Punkte)**.** Sei $f$ eine messbare Funktion auf einem Maßraum $(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Zeigen Sie:

(a) Sind $1 \leq p, q < \infty$ und $0 < \theta < 1$ gegeben und ist $r \geq 1$ bestimmt durch

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{q},$$

so gilt die Ungleichung

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^{1-\theta} \|f\|_q^{\theta}.$$

(b) Sind $1 \leq p < q < \infty$ gegeben, so gilt für alle $p \leq r \leq q$

$$L^p(X) \cap L^q(X) \subseteq L^r(X).$$

**Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!**