UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Stefan Jung

Übungen zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2016/2017

Blatt 9
Abgabe: Donnerstag, 12.1.2017, 12:00 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Zeigen Sie:

(a) Ist $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit zweimal stetig partiell differenzierbaren Komponentenfunktionen F_1, F_2, F_3, dann gilt

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0.$$

(b) Ist $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so gilt

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0.$$

(c) Ist $F = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit stetig differenzierbaren Komponentenfunktionen F_1, F_2, F_3 und ist $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar, dann gilt

$$\operatorname{div}(f \cdot F) = f \cdot \operatorname{div} F + \langle F, \operatorname{grad} f \rangle,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Welche der folgenden Vektorfelder $F = (F_1, F_2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind Gradientenfelder? Bestimmen Sie gegebenenfalls auch eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $F = \operatorname{grad} f$.

(a) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x, y)$

(b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (xy, xy)$

(c) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x^2 + y^2, 2xy)$

Zur Erinnerung: Ein Vektorfeld $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt *Gradientenfeld*, falls es eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gibt mit $F = \operatorname{grad} f$.

bitte wenden

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.** Sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ gegeben. Es bezeichne σ_{k-1} das in Aufgabe 3 von Blatt 7 konstruierte Maß auf der Einheitssphäre $\mathbb{S}_{k-1} := \{x \in \mathbb{R}^k | \; \|x\| = 1\}$. Weiter sei $\mathbb{B}_k := \{x \in \mathbb{R}^k | \; \|x\| \leq 1\}$ die Einheitskugel in $\mathbb{R}^k$.
Für ein Vektorfeld $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ mit stetig differenzierbaren Komponentenfunktionen liefert der Satz von Gauß dann die folgende Aussage:

$$\int_{\mathbb{B}_k} \operatorname{div} F(x) d\lambda^k(x) = \int_{\mathbb{S}_{k-1}} \langle F(u), u \rangle d\sigma_{k-1}(u)$$

Verifizieren Sie diese Formel im Fall $k = 2$ für das Vektorfeld

$$F : \; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \; (x_1, x_2) \mapsto (x_1^3, x_2^3)$$

indem Sie die folgenden Schritte durchführen:

(a) Wenden Sie die Formel aus Aufgabe 3 (c) von Blatt 7 auf die Funktion

$$f : \; \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \; x \mapsto \langle F(x), x \rangle$$

an und zeigen Sie damit

$$\int_{\mathbb{S}_1} \langle F(u), u \rangle d\sigma_1(u) = 6 \int_{\mathbb{B}_2} f(x) d\lambda^2(x).$$

(b) Berechnen Sie unter Verwendung von Polarkoordinaten die beiden Integrale

$$\int_{\mathbb{B}_2} f(x) d\lambda^2(x) \qquad \text{und} \qquad \int_{\mathbb{B}_2} \operatorname{div} F(x) d\lambda^2(x).$$

bitte wenden

Aufgabe 4 (10 Punkte)**.** Betrachten Sie das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad ; \quad F(x, y, z) := (y, z, x)$$

und den Paraboloiden

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1 - (x^2 + y^2), z \in [0, 1]\}$$

Berechnen Sie unabhängig voneinander

$$\int_S \langle \operatorname{rot} F, dS \rangle \qquad \text{und} \qquad \int_{\partial S} \langle F, ds \rangle$$

und verifizieren Sie so für diese Situation den Satz von Stokes (vgl. Beispiel 12.5 der Vorlesung).

Bemerkungen:

- Machen Sie sich zunächst anhand einer Skizze die Bedeutung der beiden Integrale, d.h. der Integrationsbereiche und der Integranden klar.
- Beschreiben Sie den Paraboloiden mit Hilfe von Zylinderkoordinaten, d.h. finden Sie "geeignetes"

$$T : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to S : (\varphi, z) \mapsto (x(\varphi, z), y(\varphi, z), z)$$

- Parametrisieren sie die Randkurve mit Hilfe eines geeigneten

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \partial S; \varphi \mapsto ((x(\varphi), y(\varphi), z(\varphi))$$

- Benutzen Sie für die Berechnung der Integrale dann die Transformationsvorschriften

$$\begin{aligned} ds &= \dot{\gamma}(\varphi) d\lambda(\varphi) \\ dS &= \Big(\frac{\partial T}{\partial \varphi} \times \frac{\partial T}{\partial z}\Big) d\lambda^2(\varphi, z), \end{aligned}$$

  wobei $\times$ das gewöhnliche Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ ist.

- Beachten Sie, dass diese Aufgabe lediglich der Motivation des Satzes von Stokes dient. Insbesondere wird erst später in der Vorlesung formal definiert
  - welche Eigenschaften die Menge S haben muss,
  - was wir unter deren Rand ∂S verstehen,
  - und was mit der Integration über S bzw. ∂S gemeint ist.

  Wir werden dazu die Existenz von geeigneten Abbildungen/Transformationen fordern und die Objekte und Integrationen bezüglich der Fläche S auf bekannte Objekte und Intrale in $(\mathbb{R}^k, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k), \lambda^k)$ zurückführen. Insbesondere soll hier auch nicht thematisiert werden, warum oder ob die Abbildungen T und γ geeignet sind.