UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FACHRICHTUNG 6.1 – MATHEMATIK
Prof. Dr. Roland Speicher
Stefan Jung

Übungen zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2016/2017

Blatt 10
Abgabe: Donnerstag, 19.01.2017, 12:00 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte)**.** Es sei (e_1, e_2, e_3) die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Mit (dx, dy, dz) bezeichnen wir die dazu duale Basis. Seien weiter $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie:

$$(a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz) \wedge (b_1 dy\, dz + b_2 dz\, dx + b_3 dx\, dy) = \left(\sum_{i=1}^{3} a_i b_i \right) dx\, dy\, dz$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)**.** Sei E ein n-dimensionaler reeller Vektorraum. Gegeben seien Linearformen $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in E^*$ mit $p \leq n$.

(a) Zeigen Sie, dass für alle Vektoren $v_1, \dots, v_p \in E$ die folgende Formel gilt:

$$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_p)(v_1, v_2, \dots, v_p) = \det \begin{pmatrix} \alpha_1(v_1) & \alpha_1(v_2) & \dots & \alpha_1(v_p) \\ \alpha_2(v_1) & \alpha_2(v_2) & \dots & \alpha_2(v_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_p(v_1) & \alpha_p(v_2) & \dots & \alpha_p(v_p) \end{pmatrix}$$

Hinweis: Erinnern Sie sich zunächst an die aus der Linearen Algebra bekannten Eigenschaften der Abbildung $\det : \mathbb{R}^{p \times p} \to \mathbb{R}$.

(b) Betrachten Sie den Spezialfall $p = n$ und $\alpha_i = dx_i$ und zeigen Sie, dass

$$|(dx_1 dx_2 \cdots dx_p)(v_1, \dots, v_p)|$$

das n-dimensionale Volumen desjenigen Spats ist, der von den Vektoren $v_1, \dots, v_n$ aufgespannt wird.

Welche Bedeutung hat obiger Wert im Falle $1 \leq p < n$?

Im Folgenden nennen wir eine *Differentialform vom Grad p* kurz *p-Form*.

bitte wenden

Aufgabe 3 (10 Punkte)**.**

(a) Berechnen Sie die äußere Ableitung der folgenden 1-Formen auf $\mathbb{R}^3$:

(i) $x^2\,dx + xy^2\,dz$

(ii) $(x + \cos(y))\,dy + 3\,dz$

(b) Berechnen Sie die äußere Ableitung der folgenden 2-Formen auf $\mathbb{R}^3$:

(i) $x^2\,dx\,dy + e^z\,dy\,dz$

(ii) $(x + \sin(z))\,dx\,dy + y\,dx\,dz + xyz\,dy\,dz$