



Übungen zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2016/2017

Blatt 11

Abgabe: Donnerstag, 26.1.2017, 12:00 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte). Sei ω_1 eine p -Form und ω_2 eine q -Form auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (a) Sind ω_1 und ω_2 geschlossen, so auch $\omega_1 \wedge \omega_2$.
- (b) Ist ω_1 geschlossen und ω_2 exakt, so ist $\omega_1 \wedge \omega_2$ exakt.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Wir definieren auf U die \mathbb{R}^3 -wertigen Differentialformen

$$d\vec{s} := \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d\vec{A} := \begin{pmatrix} dx_2 dx_3 \\ dx_3 dx_1 \\ dx_1 dx_2 \end{pmatrix}$$

und nennen $d\vec{s}$ das *Linienelement* und $d\vec{A}$ das *Flächenelement*. Jedem Vektorfeld $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ wird dann durch $\langle F, d\vec{s} \rangle$ bzw. $\langle F, d\vec{A} \rangle$ in naheliegender Weise eine 1- bzw. 2-Form zugeordnet. Ferner nennen wir die 3-Form $dV := dx_1 dx_2 dx_3$ das *Volumenelement*. Zeigen Sie:

- (a) Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar, so gilt

$$df = \langle \text{grad } f, d\vec{s} \rangle.$$

- (b) Ist $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig partiell differenzierbares Vektorfeld, so gilt

$$d\langle F, d\vec{s} \rangle = \langle \text{rot}(F), d\vec{A} \rangle \quad \text{und} \quad d\langle F, d\vec{A} \rangle = \text{div}(F)dV.$$

- (c) Folgern Sie aus $d^2 = 0$ die bekannten Identitäten

$$\text{rot grad } f = 0 \quad \text{und} \quad \text{div rot } F = 0$$

für zweimal stetig partiell differenzierbare Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ und zweimal stetig partiell differenzierbare Vektorfelder $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$.

bitte wenden

Aufgabe 3 (10 Punkte). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ offen. Für $p = 0, 1, 2, 3$ bezeichnen wir mit $\Omega^p(U)$ den Vektorraum aller beliebig oft stetig partiell differenzierbaren p -Formen auf U . Ferner sei $\mathcal{V}(U)$ der Vektorraum aller beliebig oft stetig partiell differenzierbaren Vektorfelder auf U . Zeigen Sie, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & \Omega^0(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(U) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(U) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow \text{id} & & \uparrow \langle \cdot, d\vec{s} \rangle & & \uparrow \langle \cdot, d\vec{A} \rangle & & \uparrow \cdot dV & & \\
 0 & \longrightarrow & C^\infty(U) & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathcal{V}(U) & \xrightarrow{\text{rot}} & \mathcal{V}(U) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(U) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

kommutiert und die vertikalen Abbildungen jeweils bijektiv sind. Wie übersetzen sich die Aussagen des Lemmas von Poincaré für sternförmiges U von der ersten auf die zweite Zeile des Diagramms?