



Übungen zur Vorlesung Analysis III
Wintersemester 2016/2017

Blatt 12

Abgabe: Donnerstag, 2.2.2017, 12:00 Uhr
in den Briefkästen im Untergeschoss von Gebäude E2 5

Aufgabe 1 (10 Punkte). Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ eine stetig differenzierbare Kurve. Zeigen Sie:

- (a) Ist ω eine stetige Differentialform vom Grad 1 auf U , so ist die bezüglich γ zurückgeholte Differentialform $\gamma^*\omega$ gegeben durch

$$(\gamma^*\omega)(t) = \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \quad \text{für alle } t \in (a, b),$$

wobei wir $\langle \alpha, x \rangle := \alpha(x)$ für Linearformen $\alpha \in (\mathbb{R}^n)^*$ und Vektoren $x \in \mathbb{R}^n$ setzen. Folgern Sie damit

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

- (b) Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Insbesondere hängt $\int_{\gamma} df$ nicht von der Kurve γ ab, die die Punkte $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ verbindet.

Aufgabe 2 (10 Punkte). Auf $U := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ betrachten wir die durch

$$\omega(x, y) := \frac{x}{x^2 + y^2} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} dx, \quad (x, y) \in U$$

definierte Differentialform ω vom Grad 1.

- (a) Zeigen Sie, dass ω geschlossen ist.
(b) Sei $r > 0$ gegeben. Berechnen Sie $\int_{\gamma_r} \omega$ für

$$\gamma_r : [0, 2\pi] \rightarrow U, \quad t \mapsto (r \cos(t), r \sin(t)).$$

Kann ω exakt sein?

bitte wenden

Aufgabe 3 (10 Punkte). Sei $\varphi : U \rightarrow V$ eine stetig partiell differenzierbare Abbildung zwischen zwei offenen Mengen $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Ist ω eine stetige Differentialform vom Grad n auf V , so ist die bezüglich φ zurückgeholte Differentialform $\varphi^*\omega$ gegeben durch

$$(\varphi^*\omega)(x) = \det(\varphi'(x))\omega(\varphi(x)) \quad \text{für alle } x \in U,$$

wobei wir mit $\varphi'(x)$ die Jacobimatrix von φ an der Stelle $x \in U$ bezeichnen.

Aufgabe 4 (10 Punkte). In der Situation von Aufgabe 2 betrachten wir

$$V := \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \in (-\infty, 0]\} \subset U.$$

Sei weiter $\gamma : [a, b] \rightarrow V$ eine beliebige Kurve in V mit $\gamma(a) = (0, -1)$ und $\gamma(b) = (0, 1)$. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\gamma} \omega.$$