

Analysis III

10-

Inhalt: Grundlagen der modernen Analysis:

- Integrationstheorie (à la Lebesgue)
- Funktionalanalysis (insb.: kompakte Op.)
- Differentialformen

Integrationstheorie

Riemanns Integral (oder Integral von Regelfunktionen) ist gut für stetige Fktn und glm. Sternmergenz, passt aber nicht zu pktweiser Konvergenz

→ braucht Verallgemeinerung des Riemann Integrals:

Daniell Integral oder Lebesgue Integral
(siehe Ana II) (hier)

(zwei verschiedene Zugänge, im Endeffekt äquivalent)

Sei $X = [0, 1]$

$$\int f(t) dt = \int f = \int f d\mu$$

$f \mapsto \int f d\mu$
 positives lineares
 Functional
 $C(X) \rightarrow \mathbb{C}$

direkte Ausdehnung
 à la Daniell

Integration von
 möglichst großer
 Klasse von Fkten
 $f: X \rightarrow \mathbb{C}$

Rieszsche
 Darstellungssatz

Def. von
 Integ. durch
 Rückführung
 auf Maß
 à la Lebesgue

$$\mu(A) := \int \mathbb{1}_A d\mu$$

Maß μ
 auf X

$\mathbb{1}_A = \chi_A$ charakteristische Fkt von Menge $A \subset X$

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

$$\int \mathbb{1}_A(x) dx = \int_a^b dx = b - a$$

"Maß" für
 Größe von A

für $A = [a, b]$

10-7

Beachte: wesentliches Ziel der Theorie ist
Definition von $\int f d\mu$ für hinreichend
große Klasse von Fkten, so dass unter
möglichst allgemeinen Bedingungen gilt:

$$\int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \quad (*)$$

für punktweise Konvergenz.

strenge Einschränkungen ("hinreichend",

"möglichst allgemein") sind notwendig:

man kann nicht alle Fkten integrieren und

(*) gilt auch nicht für alle integrierbaren
Fkten!