1. Abstrakte Integration (aus gegebenem Maß) (1

"Maß" soll die Größe von Mengen messen, so dass es sich sinnvoll verhält bzgl. kanonischen Operationen und Approximationen

z.B.: $I = [a,b]$ Intervall

$\rightsquigarrow \lambda(I) = b-a$ Länge von I

aber wir brauchen λ auch für Mengen, die aus Intervallen durch kan. Operationen konstruiert werden können!

<u>Fakt</u>: Typischerweise, kann man Maße <u>nicht</u> auf allen Mengen definieren

$\rightarrow$ Def.-bereich von Maßen heißen σ-Algebra

<u>1.1. Def.</u>: Sei X eine Menge.

1) Eine <u>σ-Algebra</u> auf X ist eine Teilmenge $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X) := \{A \mid A \subset X\}$ mit:

i) $X \in \mathfrak{A}$

ii) $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{A}$ $\quad (A^c := X \setminus A)$

iii) $A_n \in \mathfrak{A}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$ $\quad$ [beachte: (i)+(ii) $\Rightarrow \emptyset \in \mathfrak{A}$]

2) Ein <u>(positives) Maß</u> auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ ist eine Fkt

$\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty]$

mit den Eigenschaften:

i) $\mu(\emptyset) = 0$

ii) σ-Additivität:

$$\left.\begin{array}{l} A_n \in \mathfrak{A} \quad (n \in \mathbb{N}) \\ A_n \cap A_m = \emptyset \quad (n \neq m) \end{array}\right\} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

3) Ein <u>messbarer Raum</u> $(X, \mathfrak{A})$ ist eine Menge X mit einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ auf X. Elemente von $\mathfrak{A}$ heißen <u>messbare Mengen</u>.

4) Ein <u>Maßraum</u> $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ hat zusätzlich ein Maß μ auf $\mathfrak{A}$.

<u>1.2. Bemerkungen:</u> 0) englische Bezeichnungen:

$\mathfrak{A}$: σ-algebra = σ-field

μ: measure

$(X, \mathfrak{A})$ measurable space

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ measure space

1) Wesentlich ist, dass in Def. von σ-Algebra und Maß <u>abzählbare</u> Vereinigungen erlaubt sind; "σ" steht für "abzählbar"

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \in [0, \infty]$ ist immer definiert, da alle Terme ≥ 0

3) Es ist sinnvoll auch $\mu(A) = \infty$ für bestimmte A zuzulassen; z.B. Länge$([a, \infty)) = \infty$

4) Betrachte $X = \mathbb{R}$

Triviale Beispiele von σ-Algebren sind

$\mathfrak{A} = \{\phi, \mathbb{R}\}$

$\mathfrak{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R}) = \{$ alle Teilmengen von $\mathbb{R} \}$

5) Sei $\mathcal{F}$ Familie von Teilmengen von X (nicht notwendigerweise σ-Algebra).

Dann ist

$$\sigma(\mathcal{F}) := \bigcap_{\substack{\mathfrak{A}\ \sigma\text{-Algebra} \\ \mathcal{F} \subset \mathfrak{A}}} \mathfrak{A}$$

nicht leer (da $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}($ und ist die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{F}$ enthält z.B.: $\mathcal{F} = \{ [a,b] \mid a,b \in \mathbb{R} \}$

(beachte: $\mathcal{F}$ ist keine σ-Algebra)

$\Rightarrow$ $\mathcal{B} := \sigma(\mathcal{F})$ ist kleinste σ-Algebra die alle Intervalle enthält

$\mathcal{B}$ heißt <u>Borel-σ-Algebra</u>

6) Nichttriviale σ-Algebren sind normalerweise recht abstrakte Objekte; z.B. gibt es keine explizite Beschreibung einer allgemeinen Borelmenge $A \in \mathcal{B}$

7) Im Augenblick wissen wir auch noch nicht, wie wir nichttriviale Maße konstruieren können; z.B. wie können wir λ = Länge von Intervallen zu beliebigen Borelmengen fortsetzen.
Dies werden wir im nächsten Kapitel behandeln, im Augenblick nehmen wir ein Maß einfach als gegeben an.

8) σ-Additivität eines Maßes

$\hat{=}$ Stetigkeitseigenschaft

$\rightsquigarrow$ siehe Folgendes

1.3. Notationen: Seien $A_n \subset X$ $(n \in \mathbb{N})$
$A \subset X$.

Dann

$$A_n \nearrow A \;:\Longleftrightarrow\; A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots, \quad A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$A_n \searrow A \;:\Longleftrightarrow\; A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots, \quad A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

1.4. Satz: Sei μ ein Maß auf einer σ-Algebra $\mathfrak{A}$ und betrachte $A_n \in \mathfrak{A}$ $(n \in \mathbb{N})$, $A \in \mathfrak{A}$.
Dann gilt:

1) $A_n \nearrow A \;\Longrightarrow\; \lim\limits_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$

2) $\left.\begin{array}{l} A_n \searrow A \\ \mu(A_n) < \infty \;\; \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$

Beweis: Übungsaufgabe! $\square$

1.5. Def.: Seien $(X, \mathfrak{A})$ und $(Y, \mathfrak{M})$ messbare Räume. Eine Abbildung

$$f : X \to Y$$

heißt **messbar**, falls

$$f^{-1}(M) \in \mathfrak{A} \quad \forall\, M \in \mathfrak{M}$$

$[\, f^{-1}(M) := \{x \in X \mid f(x) \in M\} \,]$

1.6. Satz: Sei $\mathfrak{M} = \sigma(\mathcal{F})$ für $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(Y)$.

Dann gilt:

$f: X \to Y$ messbar $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(F) \in \mathfrak{a} \quad \forall F \in \mathcal{F}$

Beweis: "$\Rightarrow$": klar

"$\Leftarrow$": Setze

$\mathcal{N} := \{ N \subset Y \mid f^{-1}(N) \in \mathfrak{a} \}$

Dann gilt:

i) $\mathcal{F} \subset \mathcal{N}$

ii) $\mathcal{N}$ ist σ-Algebra

$\Rightarrow \mathcal{N} \supset \sigma(\mathcal{F}) = \mathfrak{M}$

d.h. $f^{-1}(M) \in \mathfrak{a}$

$\forall M \in \mathfrak{M} \subset \mathcal{N}$

d.h. f ist messbar

zeige (ii): • $X = f^{-1}(Y) \in \mathfrak{a} \Rightarrow Y \in \mathcal{N}$

• $N \in \mathcal{N} \Rightarrow f^{-1}(N) \in \mathfrak{a}$

$\Rightarrow f^{-1}(N^c) = (f^{-1}(N))^c \in \mathfrak{a}$

$\Rightarrow N^c \in \mathcal{N}$

• $N_n \in \mathcal{N}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\Rightarrow f^{-1}(N_n) \in \mathfrak{a} \quad \forall n$

$\Rightarrow f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(N_n) \in \mathfrak{a}$

$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \in \mathcal{N}$ □

Opt (insbesondere für $Y = \mathbb{R}, \mathbb{C}$)
sind die betrachteten σ-Algebren durch
die Topologie gegeben.

<u>1.7 Def.</u>: 1) Eine <u>Topologie</u> auf einer
Menge X ist eine Teilmenge $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ mit

(a) $\emptyset, X \in \tau$

(b) $V_1, \dots, V_n \in \tau \Rightarrow V_1 \cap \dots \cap V_n \in \tau$

(τ stabil unter <u>endlich vielen</u> $\cap$)

(c) $V_i \in \tau$ $(i \in I)$ für bel. Indexmenge I $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} V_i \in \tau$

(τ stabil unter beliebigen $\cup$)

Die Elemente von τ heißen <u>offene Mengen</u>.

2) Eine Abb. $f: X \to Y$ zwischen zwei
topologischen Räumen (X, τ_X) und (Y, τ_Y)
heißt <u>stetig</u>, falls

$$f^{-1}(V) \in \tau_X \quad \forall V \in \tau_Y$$

3) Sei (X, τ) topologischer Raum. Die von τ
erzeugte σ-Algebra $\sigma(\tau)$ heißt die σ-Algebra
der <u>Borelmengen</u> in X

1.8. Konvention: Im Folgenden betrachten wir $Y = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$ immer als messbaren Raum versehen mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B} = \sigma(\tau)$ bzgl. der kanonischen Topologie τ auf Y.

1.9. Korollar: Sei (X, τ) topologischer Raum. Dann ist jede stetige Fkt $f : X \to \mathbb{R}$ messbar (bzgl. der Borel-σ-Algebren $\sigma(\tau)$ auf X und $\mathbb{R}$)

Beweis: $\mathcal{B} = \sigma(\text{offene Mengen auf } \mathbb{R})$

somit reicht z.z.: $f^{-1}(V) \in \sigma(\tau) \quad \forall V \subset \mathbb{R}$ offen
gemäß 1.6.

f stetig, V offen $\Longrightarrow f^{-1}(V)$ offen

d.h. $f^{-1}(V) \in \tau \subset \sigma(\tau)$ $\square$

1.10. Satz: Jede offene Menge in $\mathbb{R}$ ist abzählbare Vereinigung von offenen Intervallen und somit

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B} &= \sigma(\text{offene Mengen in } \mathbb{R}) \\
&= \sigma(\{(a,b) \mid a < b\}) \\
&= \sigma((\alpha, \infty) \mid \alpha \in \mathbb{R}) \\
&= \sigma([\alpha, \infty) \mid \alpha \in \mathbb{R})
\end{aligned}
$$

<u>Beweis:</u> $V \subset \mathbb{R}$ offen; wähle um jeden rationalen Pkt $x_i \in V$ maximales offenes Intervall $\mathcal{U}_i$ mit $x_i \in \mathcal{U}_i \subseteq V$; dann $V = \bigcup_i \mathcal{U}_i$

Somit $\mathcal{B} = \sigma((a,b))$

Da $(-\infty, \alpha) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, \alpha)$

und $(-\infty, \alpha)^c = [\alpha, \infty)$

$\Rightarrow \mathcal{B} = \sigma([\alpha, \infty))$

$(\alpha, \infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} [\alpha + \frac{1}{n}, \infty)$

$\Rightarrow \mathcal{B} = \sigma((\alpha, \infty))$ $\square$

<u>1.11 Korollar:</u> Sei $(X, \mathcal{A})$ messbarer Raum und $f: X \to \mathbb{R}$ Fkt. Dann gilt

$$f \text{ messbar} \iff \{x \mid f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$
$$\iff \{x \mid f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$
$$\iff \{x \mid f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

<u>Beweis:</u> klar nach 1.10 und 1.6. $\square$

<u>1.12. Satz:</u> Seien $f, g: X \to \mathbb{R}$ messbar. Dann sind auch $f+g$ und $f \cdot g$ messbar.

<u>Beweis:</u> beachte: $f(x) + g(x) < \alpha$

$\Rightarrow f(x) < \alpha - g(x)$

$\Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q}: f(x) < r < \alpha - g(x)$

Somit: $\{x \mid f(x)+g(x) < \alpha\} =$

$$= \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \underbrace{\{x \mid f(x) < r\}}_{\in\,\mathfrak{A}} \cap \underbrace{\{x \mid g(x) < \alpha - r\}}_{\in\,\mathfrak{A}} \in$$

abzählbar

also: $\{x \mid f(x)+g(x) < \alpha\} \in \mathfrak{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

d.h. $f+g$ messbar

$f \cdot g$ analog $\square$

1.13. Konvention: Für reellwertige Fkten wollen wir auch $+\infty$ und $-\infty$ als Fktswerte zulassen, d.h. wir betrachten auch

$$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

versehen mit σ-Algebra

$$\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \sigma([\alpha, \infty] \mid \alpha \in \mathbb{R})$$

$$= \sigma((\alpha, \infty] \mid \alpha \in \mathbb{R})$$

Somit ist $f : (X, \mathfrak{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar gdw

$$\{x \mid f(x) \geq \alpha\} \in \mathfrak{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$[\Leftrightarrow \{x \mid f(x) > \alpha\} \in \mathfrak{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad]$$

Top. Begriffe (Grenzwert, sup, inf ..) sind auf $\overline{\mathbb{R}}$ in offensichtlicher Weise definiert, mit der Konvention $-\infty \leq x \leq +\infty \quad \forall x \in \overline{\mathbb{R}}$

1.14. Satz: Sei $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $(n \in \mathbb{N})$ eine Folge von messbaren Fkten. Dann sind auch

$\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\overline{\lim_n} f_n$, $\underline{\lim_n} f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$

messbar.

Insbesondere: Falls $(f_n)_n$ pktweise konvergiert mit $f = \lim_n f_n$, dann ist auch f messbar.

Beweis: für sup: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\{x \mid \sup_n f_n(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\{x \mid f_n(x) > \alpha\}}_{\in \mathfrak{a} \ \forall n} \in \mathfrak{a}$$

inf analog

$$\overline{\lim_n} f_n = \underbrace{\inf_n \underbrace{\sup_{k \geq n} f_k}_{\text{messbar } \forall n}}_{\text{messbar}}$$

$\underline{\lim_n} f_n$ analog

17

1.15 Notation: Sei $A \subset X$ beliebige Menge. Die <u>charakteristische Fkt</u> 1_A (oder χ_A) ist definiert durch

$$1_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

beachte: 1_A messbar $\Longleftrightarrow$ A messbar (d.h. $A \in \mathfrak{A}$)

1.16. Def.: Eine Fkt $s: X \to \mathbb{R}$ heißt einfach (oder Elementarfkt), falls sie messbar ist und ihr Wertebereich nur aus endlich vielen Pkten besteht, d.h.

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N},$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

$A_1, \dots, A_n \subset X$ disjunkt

und $A_i \in \mathfrak{A}$ $\forall i = 1, \dots, n$

beachte: Summe, Differenz, Produkt von zwei einfachen Fkten ist jeweils wieder einfach

1.17. Satz: Sei $f: X \to [0, \infty]$ messbar. Dann gibt es einfache $s_n: X \to \mathbb{R}$ mit

(a) $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq f$

(b) $\lim_{n \to \infty} s_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in X$

Beweis:

Ist $n \in \mathbb{N}$ gegeben, so definieren wir

- für $k = 0, 1, \dots, 2^n \cdot n - 1$

  $E_{n,k} := f^{-1}\left([k \cdot 2^{-n}, (k+1) \cdot 2^{-n}) \right)$

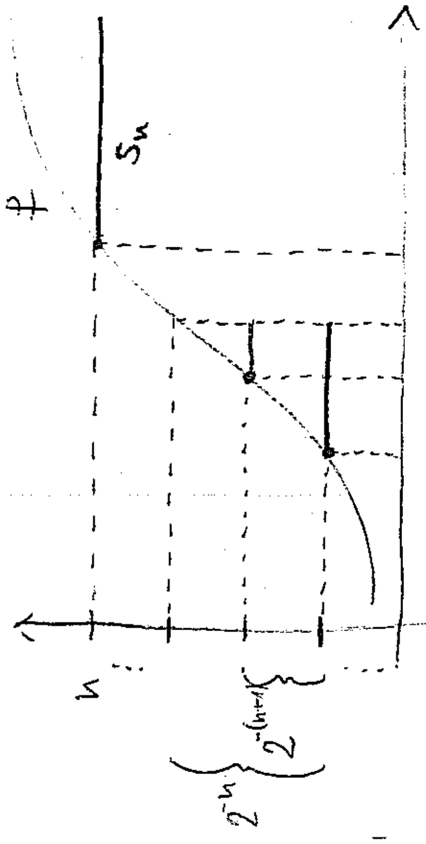
- für $k = 2^n \cdot n$

  $E_{n,2^n n} := f^{-1}\left([n, \infty) \right)$

Die Funktionen

$$s_n := \sum_{k=0}^{2^n n} k\, 2^{-n} \chi_{E_{n,k}}$$

leisten dann das Gewünschte.



1.18. Bemerkung: 1) Strategie zur Def. vom Integral:

charakt. Fkt $\longrightarrow$ einfache Fkt. $\longrightarrow$ messbare Fkt

$$\int \chi_A \, d\mu = \mu(A) \xrightarrow{①} \int \sum \alpha_i \chi_{A_i} \, d\mu \xrightarrow{②} \int \lim s_n \, d\mu$$

$$= \sum \alpha_i \mu(A_i) \qquad = \lim \int s_n \, d\mu$$

Linearität $\qquad$ Stetigkeit

dabei tritt das Problem der Eindeutigkeit in diesem Zugang auf.

im Schritt ①:

$$\sum \beta_j \chi_{B_j} = s = \sum \alpha_i \chi_{A_i}$$

$$\Downarrow \; ?\,!$$

$$\sum \beta_j \mu(B_j) = \sum \alpha_i \mu(A_i)$$

das ist einfach zu sehen

im Schritt ②:

$$\lim s_n = f = \lim t_n$$

$$\Downarrow \; ?\,?$$

$$\lim_n \int s_n \, d\mu = \lim_n \int t_n \, d\mu$$

ist nicht direkt offensichtlich,
daher definieren wir das Integral
etwas anders und betrachten
Konvergenzeigenschaften später

2) Um Probleme mit $\infty - \infty$ zu vermeiden,
betrachten wir zunächst $f \geq 0$;
später dann allgemeinen Fall

3) Vgl. zu Vorgehensweise hier auch
Behandlung von "summierbaren" Reihen in Ana I

Im Folgenden sei $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum. (1.1

<u>1.19. Def:</u> 1) Sei $s: X \to [0, \infty)$ eine einfache Fkt,

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, 1_{A_i} \qquad (A_i \in \mathfrak{A}, \; 0 \leq \alpha_i < \infty \; \forall i)$$

und $E \in \mathfrak{A}$, dann def. wir

$$\int_E s \, d\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu(A_i \cap E) \quad \in [0, \infty)$$

wobei wir die Konvention $0 \cdot \infty = 0$ benutzen.

2) Für eine messbare Fkt

$$f: X \to [0, \infty]$$

und $E \in \mathfrak{A}$ definieren wir das <u>Lebesgue Integral</u> von f über E durch

$$\int_E f(x) \, d\mu(x) = \int_E f \, d\mu$$

$$:= \sup_{\substack{s \text{ einfach} \\ 0 \leq s \leq f}} \int_E s \, d\mu \quad \in [0, \infty]$$

1.20 Bemerkung: 1) Für einfache $s: X \to [0,\infty)$ stimmen die Def aus (1) und (2) überein:

Falls s einfach, dann ist

$$\sup_{\substack{\tilde{s} \text{ einfach} \\ 0 \le \tilde{s} \le s}} \int_E \tilde{s}\, d\mu = \int_E s\, d\mu$$

da: (i) s kann als $\tilde{s}$ gewählt werden

(ii) $\tilde{s} \le s \Rightarrow \int_E \tilde{s}\, d\mu \le \int_E s\, d\mu$

da $\tilde{s} \le s$ einfach

$\Rightarrow \tilde{s} = \sum \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ wobei $A_i \in \mathcal{A}$ disjunkt

$s = \sum \beta_i \cdot \mathbb{1}_{A_i}$ $\quad 0 \le \alpha_i \le \beta_i < \infty \ \forall i$

$$\Rightarrow \int_E \tilde{s}\, d\mu = \sum_i \alpha_i \mu(E \cap A_i)$$

$$\le \sum_i \beta_i \mu(E \cap A_i)$$

$$= \int_E s\, d\mu$$

2) Auch für $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$ $\quad A_i \in \mathcal{A}$ disjunkt, $0 \le \alpha_i \le \infty$

gilt $\int s\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu(A_i)$ wobei $\infty \cdot 0 = 0$

1.21. Satz: Seien

$f, g : X \to [0, \infty]$ messbar

und $A, B, E \in \mathfrak{A}$. Dann gilt

(i) $f \leq g \implies \int_E f \, d\mu \leq \int_E g \, d\mu$

(ii) $A \subset B \implies \int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu$

(iii) ~~Für alle konst. $0 \leq c \leq \infty$ gilt:~~

$$\int_E cf \, d\mu = c \int_E f \, d\mu$$

(iv) $f(x) = 0 \quad \forall x \in E \implies \int_E f \, d\mu = 0$

(auch falls $\mu(E) = \infty$)

(v) $\mu(E) = 0 \implies \int_E f \, d\mu = 0$

(auch falls $f(x) = \infty \quad \forall x \in E$)

(vi) $\int_E f \, d\mu = \int_X 1_E \cdot f \, d\mu$

Beweis: direkte Folgerungen aus Def.

z.B. (i) jedes einfache s mit $0 \le s \le f$
erfüllt auch $0 \le s \le g$

(ii) zunächst für $f = s$ einfach

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbb{1}_{A_i}$$

$$\Rightarrow \int_A f \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \underbrace{\mu(A \cap A_i)}_{\le \mu(B \cap A_i)}$$

Monotonie des Maßes

$$\le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(B \cap A_i)$$

$$= \int_B f \, d\mu$$

Sei nun f allgemein

$$\Rightarrow \int_A f \, d\mu = \sup_{\dots} \underbrace{\int_A s \, d\mu}_{\le \int_B s \, d\mu \text{ für alle } s}$$

$$\le \sup_{\dots} \int_B s \, d\mu$$

$$= \int_B f \, d\mu$$

z.B (i→): Sei $f \equiv 0$ auf E

$\Rightarrow$ Jedes einfache s mit $0 \le s \le f$

ist auch $\equiv 0$ auf E

d.h. für solches s gilt:

$$\int_E s \, d\mu = \sum_i \alpha_i \underbrace{\mu(A_i \cap E)}_{=0 \ \forall i} = 0$$

da entweder

$$A_i \cap E = \emptyset \Rightarrow \mu(A_i \cap E) = 0$$

oder

$$A_i \cap E \neq \emptyset \Rightarrow \alpha_i = 0$$

Dann ist auch

$$\int_E f \, d\mu = \sup 0 = 0 \qquad \square$$

<u>1.22. Bem</u>: Die Linearität des Integrals, d.h.

$$\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$$

ist nach Def. zwar klar für einfache f, g, aber nicht für beliebige messbare.

Dies werden wir erst später zeigen können!

1.23 Proposition: Sei $s : X \to [0, \infty)$ eine einfache Fkt. Setze

$$\varphi(E) := \int_E s \, d\mu \quad \text{für } E \in \mathfrak{A}$$

Dann ist φ ein Maß auf $\mathfrak{A}$. Insbesondere gilt für $E_n \in \mathfrak{A}$ $(n \in \mathbb{N})$:

$$E_n \nearrow E \implies \int_{E_n} s \, d\mu \to \int_E s \, d\mu$$

Beweis: • $\varphi \geq 0$ klar

• $\varphi(\emptyset) = 0$ klar nach 1.21. (v)

• σ-Additivität: Betrachte $E_i \in \mathfrak{A}$ mit $E_i \cap E_j = \emptyset$ $(i \neq j)$

setze $E := \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$

Sei $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$. Dann gilt

$$\varphi(E) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \mu(\underbrace{A_i \cap E}_{\bigcup_{j=1}^{\infty} (\underbrace{A_i \cap E_j}_{\text{disjunkt für versch. } j})})$$

$$\overbrace{= \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_j)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_i \cdot \mu(A_i \cap E_j) \qquad \text{alle Terme} \geq$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mu(A_i \cap E_j)}_{\int_{E_j} s \, d\mu \, = \, \varphi(E_j)}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(E_j)$$

$\Rightarrow \varphi$ ist σ-additiv.

Rest folgt aus Stetigkeit von Maß, 1.4 $\square$

<u>1.24. Satz von der monotonen Konvergenz (Lebesgue Monotone Convergence Theorem, Satz von Beppo Levi):</u>

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge von messbaren Fkten auf X mit

(a) $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \ldots \leq \infty \qquad \forall x \in X$

(b) $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in X$

Dann ist f messbar und es gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

Beweis: f ist messbar nach 1.14

$$f_n \leq f_{n+1} \overset{1.21.(i)}{\Longrightarrow} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f_{n+1} \, d\mu$$

$\Rightarrow \left(\int_X f_n \, d\mu \right)_{n \in \mathbb{N}}$ wachsende Folge in $[0, \infty]$

$\Rightarrow \exists \, \alpha \in [0, \infty]$ s.d. $\int_X f_n \, d\mu \to \alpha$

$$f_n \leq f \overset{1.21(i)}{\Longrightarrow} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu \quad \forall n$$

$$\overset{n \to \infty}{\Longrightarrow} \quad \alpha \leq \int_X f \, d\mu$$

somit $\lim\limits_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$

bleibt z.z: "$\geq$"

Dazu betrachte einfache s mit $0 \leq s \leq f$

$\rightsquigarrow s \leq f_n$ für $n \to \infty$, aber nur "fast"

Genauer: Fixiere $0 < c < 1$ und setze

$$E_n := \{ x \in X \mid f_n(x) \geq c \, s(x) \} \quad (n \in \mathbb{N})$$

Dann gilt:

- $E_n \in \mathfrak{A} \quad \forall n$
- $E_1 \subset E_2 \subset \dots \qquad (\text{da } f_1 \leq f_2 \leq \dots)$
- $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

denn: falls $f(x) = 0 \Rightarrow s(x) = 0$

$\Rightarrow x \in E_n \quad \forall n$

falls $f(x) > 0 \Rightarrow c\, s(x) < f(x)$

$\Rightarrow \exists n : c\, s(x) < f_n(x)$

$(\text{da } f_n(x) \to f(x))$

d.h. $\exists n : x \in E_n$

%.

Somit gilt: $E_n \nearrow X$, also

$$\int_X f_n \, d\mu \geq \int_{E_n} f_n \, d\mu \geq c \int_{E_n} s \, d\mu$$

$\downarrow n \to \infty \qquad\qquad \downarrow n \to \infty$ nach 1.23

$\alpha \qquad\qquad c \int_X s \, d\mu$

$$\Rightarrow \alpha \geq c \int_X s \, d\mu \qquad \forall c < 1$$

$$\Rightarrow \alpha \geq \int_X s \, d\mu \qquad \forall \text{ einfachen } s \text{ mit } 0 \leq s \leq f$$

aber dann:

$$\alpha \geq \sup_{\substack{s \text{ einfach} \\ 0 \leq s \leq f}} \int_X s \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu = \alpha = \int_X f \, d\mu \qquad \square$$

<u>1.25. Korollar:</u> 1) Seien $f, g : X \to [0, \infty]$ messbar. Dann gilt

$$\int_X (f+g) \, d\mu = \int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu$$

2) Seien $f_n : X \to [0, \infty]$ messbar $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt.

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu$$

3) Sei $f : [0, \infty]$ messbar. Dann ist

$$E \mapsto \int_E f \, d\mu$$

ein Maß auf $\mathfrak{A}$.

<u>Beweis</u>: nur (1), (2) und (3) ähnlich

(1) Seien $f, g \geq 0$ messbar.

1.17. $\Rightarrow$ $\exists$ einfache s_n, t_n mit

$$s_n \nearrow f, \quad t_n \nearrow g$$

$$\Rightarrow \quad s_n + t_n \nearrow f + g$$

Dann gilt

$$\int_X (f+g)\, d\mu = \lim \underbrace{\int_X (s_n + t_n)\, d\mu}$$

$$= \int_X s_n\, d\mu + \int_X t_n\, d\mu \qquad \text{vgl. } 1.22.$$

$$= \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu$$

$\square$

<u>1.26. Lemma von Fatou:</u> Seien

$$f_n : X \to [0, \infty] \qquad (n \in \mathbb{N})$$

messbar. Dann gilt:

$$\int_X \left(\liminf_{n \to \infty} f_n\right) d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n\, d\mu$$

<u>Beweis</u>: Übungsaufgabe!

$\square$

1.27. Notation: Betrachte nun

$f : X \to \mathbb{C}$

Wir zerlegen dies gemäß

$$f = f_1 + i f_2$$
$$= (f_1^+ - f_1^-) + i\,(f_2^+ - i\, f_2^-)$$

wobei $f_1 := \operatorname{Re} f$

$f_2 := \operatorname{Im} f$

und für $g : X \to \mathbb{R}$:

$$g^+ := \max(g, 0) \geq 0$$
$$g^- := -\min(g, 0) \geq 0,$$

also $g = g^+ - g^-$

Beachte: $f : X \to \mathbb{C}$ messbar

$\Longleftrightarrow$ alle $f_1^+, f_1^-, f_2^+, f_2^- : X \to [0, \infty)$ sind messbar

1.28. Def.: 1) Eine messbare Fkt $f : X \to \mathbb{C}$ ist (Lebesgue) integrierbar, falls

$$\int |f| \, d\mu < \infty$$

Wir definieren dann das Integral als

$$\int f \, d\mu := \left(\int f_1^+ \, d\mu - \int f_1^- \right) + i \left(\int f_2^+ \, d\mu - \int f_2^- \, d\mu \right) \in \mathbb{C}$$

2) Wir setzen

$$\mathcal{L}^1(\mu) := \{ f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ integrierbar} \}$$

<u>1.29. Bem.:</u> 1) Beachte:

f messbar $\Rightarrow$ $|f|$ messbar

2) Es gilt: $0 \leq f_1^+ \leq |f|$, d.h.

$$0 \leq \int f_1^+ \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu \underset{\substack{\uparrow \\ \text{für } f \in \mathcal{L}^1(\mu)}}{<} \infty$$

Analog für die anderen Integrale, also

$$\int f \, d\mu \in \mathbb{C} \quad \text{für } f \in \mathcal{L}^1(\mu)$$

<u>1.30. Proposition:</u> $\mathcal{L}^1(\mu)$ ist ein komplexer Vektorraum, d.h. für $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Außerdem ist Integration eine lineare Abb., d.h.

$$\int (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu + \beta \int g\, d\mu$$

<u>Beweis:</u> $\alpha f + \beta g$ messbar nach 1.12

$$\int |\alpha f + \beta g|\, d\mu \leq \int (|\alpha|\,|f| + |\beta|\,|g|)\, d\mu$$

$$\leq |\alpha| \int |f|\, d\mu + |\beta| \int |g|\, d\mu$$

(nach 1.21 (c) und 1.25 (1))

$$< \infty \quad , \text{ da } f, g \in L^1(\mu)$$

$\Rightarrow$ $\alpha f + \beta g$ integrierbar

Linearität folgt aus Linearität für positive Fkten $\rightarrow$ Nachrechnen

(vgl. Rudin, Th. 1.32)

<u>1.31. Satz:</u> Für $f \in L^1(\mu)$ gilt

$$\left| \int_X f\, d\mu \right| \leq \int_X |f|\, d\mu$$

<u>Beweis:</u> Sei $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ so dass

$$\alpha \cdot \int f\, d\mu = \left| \int f\, d\mu \right|$$

$$\shortparallel$$

$$\int \alpha f\, d\mu = \operatorname{Re} \int \alpha f\, d\mu \qquad (\text{da reell})$$

$$= \int \underbrace{\mathrm{Re}(\alpha f)}_{\leq |\alpha f| = |f|} \, d\mu$$

$$\leq \int |f| \, d\mu \qquad \square$$

1.32. Satz von Lebesgue von der majorisierten Konvergenz (Lebesgue's Dominated Convergence Theorem):

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Fkten, $f_n : X \to \mathbb{C}$, so dass der pktweise Grenzwert

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

für alle $x \in X$ existiert. Falls es ein nicht-negatives $g \in L^1(\mu)$ gibt mit

$$|f_n(x)| \leq g(x) \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ x \in X,$$

dann ist $f \in L^1(\mu)$ und es gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - f| \, d\mu = 0$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

Beweis: f ist messbar nach 1.14

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n$$

$$\Rightarrow \quad |f(x)| \leq g(x)$$

$$\Rightarrow \quad \int_X |f(x)|\, d\mu(x) \leq \int_X g(x)\, d\mu(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } g \in L^1(\mu)}}{<} \infty$$

$$\Rightarrow \quad f \in L^1(\mu)$$

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq 2g$$

$$\Rightarrow \quad 2g - |f_n - f| \geq 0$$

$$\overset{\text{Fatou}}{\Rightarrow} \quad \int \underbrace{\liminf (2g - |f_n - f|)}_{2g}\, d\mu \leq \liminf \int (\dots)\, d\mu$$

$$\Rightarrow \int 2g\, d\mu \leq \liminf \left(\int 2g\, d\mu - \int |f_n - f|\, d\mu \right)$$

$$= \int 2g\, d\mu - \limsup \int |f_n - f|\, d\mu$$

$$\overset{\int g\, d\mu < \infty}{\Rightarrow} \quad \limsup \int |f_n - f|\, d\mu \leq 0$$

$$\text{IV}$$

$$\liminf \int \underbrace{|f_n - f|}_{\geq 0}\, d\mu \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim \int_X |f_n - f|\, d\mu = 0$$

Somit $\underbrace{\left| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right|}_{\geq 0 \ \forall n} = \left| \int (f_n - f) \, d\mu \right|$

$$\leq \int |f_n - f| \, d\mu$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$\Rightarrow \lim \left| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right| = 0$

d.h. $\lim\limits_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$ □

1.33. Bemerkungen: 1) Die Konvergenz

$$\lim_{n \to \infty} \int |f_n - f| \, d\mu = 0$$

ist die angemessene in $L^1(\mu)$.

$$\|f\|_1 := \int |f| \, d\mu$$

definiert "fast" eine Norm auf $L^1(\mu)$, welche dies zum Banachraum macht; mehr dazu in Kap. 6

2) Damit $\|f\|_1$ wirklich eine Norm ist, brauchen wir

$$\underset{\displaystyle \int |f| \, d\mu}{\underset{\shortparallel}{\|f\|_1}} = 0 \overset{!}{\Rightarrow} f = 0$$

aber: $f = 1_A$ mit $\mu(A)$ verletzt dies!

daher: wir werden in L^1 Fkten identifizieren, falls sie sich auf Mengen vom Maß 0 unterscheiden:

$f \sim g :\Leftrightarrow \{x \mid f(x) \neq g(x)\}$ ist Nullmenge

und

$L^1(\mu)$ = Äquivalenzklasse von Fkten bzgl. $\sim$

<u>1.34 Def.</u>: Eine Eigenschaft gilt <u>fast überall</u> (f.ü.) falls

$\{x \mid$ Eigenschaft gilt nicht für $x\}$

Maß 0 hat.

Insbesondere:

$f = g$ f.ü. $\Leftrightarrow \mu(\{x \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$

$f_n \to f$ f.ü. $\Leftrightarrow \mu(\{x \mid f_n(x) \not\to f(x)\}) = 0$

<u>1.35. Bem</u>: 1) Englisch:

fast überall = almost everywhere

f.ü. = a.e.

2) Beachte:

$f = g$ f.ü. $\Rightarrow \int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu \quad \forall E \in \mathcal{O}\!\mathcal{l}$

denn: $N := \{x \mid f(x) \neq g(x)\}$, $\mu(N) = 0$

$$\Rightarrow \int_E f\,d\mu = \underbrace{\int_{E\setminus N} f\,d\mu}_{=\int_{E\setminus N} g\,d\mu} + \underbrace{\int_{E\cap N} f\,d\mu}_{=0}$$

vgl. 1.25 (3)

$$= \int_{E\setminus N} g\,d\mu + \overbrace{\int_{E\cap N} g\,d\mu}$$

$$= \int_E g\,d\mu$$