# 2. Konstruktion von Maßen

**2.1. Def.:** 1) Eine *Algebra* von Mengen (oder Mengenalgebra) ist eine nichtleere Familie $\mathfrak{A}$ von Teilmengen (einer gegebenen Menge $X$) so dass

(i) $A, B \in \mathfrak{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{A}$

(ii) $A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^c \in \mathfrak{A}$

---

2) Ein *Prämaß* auf einer Algebra $\mathfrak{A}$ ist eine Funktion

$$\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty]$$

mit

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $$\left.\begin{array}{l} A_1, A_2, \ldots \text{ disjunkt} \\ \text{mit } A_n \in \mathfrak{A} \ \forall n \\ \underline{\text{und}} \ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A} \end{array}\right\} \Rightarrow \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

**2.2. Bemerkungen:** 0) englisch

Prämaß = measure (on an algebra)

1) $\mathfrak{A}$ Algebra: da $\mathfrak{A} \neq \emptyset \Rightarrow \exists A \in \mathfrak{A}$

$\Rightarrow A^c \in \mathfrak{A} \Rightarrow X = A \cup A^c \in \mathfrak{A} \Rightarrow \emptyset = X^c \in \mathfrak{A}$

2) Algebren und Prämaße sind, im Gegensatz zu $\sigma$-Algebren und Maßen, recht einfach (und explizit!) zu konstruieren.

<u>2.3. Beispiel:</u> $X = \mathbb{R}$

$$\mathfrak{A} := \{ A \subset \mathbb{R} \mid A \text{ ist Vereinigung von endlich vielen Intervallen} \}$$

ist eine Algebra und

$$\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty]$$

$$A = \dot{\bigcup_{k=1}^{n}} I_k \mapsto \mu(A) = \sum_{k=1}^{n} \text{Länge}(I_k)$$

ist ein Prämaß auf $\mathfrak{A}$

Beweis: Übungsaufgabe!

($\dot{\cup} \mathrel{\hat{=}}$ disjunkte Vereinigung)

<u>2.4. Def:</u> Sei $\mu$ ein Prämaß auf einer Algebra $\mathfrak{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Wir definieren dann für alle $E \subset X$

$$\mu^*(E) := \inf \{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \mid A_n \in \mathfrak{A} \ \forall n \text{ und } E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \}$$

$\mu^*$ heißt das (von $\mu$ induzierte) <u>äußere Maß</u>.

**2.5. Proposition:** $\mu^*$ hat die folgenden Eigenschaften:

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

(ii) $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

"Monotonie"

(iii) $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$

"Subadditivität"

---

(iv) $\mu^*(A) = \mu(A) \quad \forall A \in \mathfrak{a}$

**Beweis:** (i), (ii) klar

(iii) Sei $E := \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

Falls $\mu^*(E_n) = \infty$ für ein $n$

$\Rightarrow$ Beh. klar

somit können wir annehmen: $\mu^*(E_n) < \infty \quad \forall n$

Fixiere $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow \forall n \; \exists A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots \in \mathfrak{a}$ mit

$$E_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^{(n)} \quad \text{und}$$

$$\mu^*(E_n) > \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i^{(n)}) - \frac{\varepsilon}{2^n}$$

$$\Rightarrow E = \bigcup_n E_n \subset \bigcup_n \bigcup_i A_i^{(n)}$$

$$\Rightarrow \mu^*(E) \leq \sum_n \underbrace{\sum_i \mu(A_i^{(n)})}_{< \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}}$$

$$< \sum_n \mu^*(E_n) + \varepsilon$$

$$\overset{\varepsilon \searrow 0}{\Longrightarrow} \mu^*(E) \leq \sum_n \mu^*(E_n)$$

(iv) Übungsaufgabe ! $\square$

<u>2.6. Def</u>: Eine Menge $E \subset X$ heißt <u>messbar</u> bzgl. $\mu^*$ falls für alle $A \subset X$ gilt:

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

Wir setzen

$\mathfrak{M}_\mu := \{E \subset X \mid E \text{ messbar bzgl. } \mu^*\}$

und

$\overline{\mu} := \mu^*$ eingeschränkt auf $\mathfrak{M}_\mu$

<u>2.7. Theorem</u>: 1) $\mathfrak{M}_\mu$ ist eine $\sigma$-Algebra.

2) $\overline{\mu}$ ist ein Maß auf $\mathfrak{M}_\mu$

3) $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}_\mu$

(2-5

Beweis: 1) • $\phi \in \mathfrak{M}_\mu$ klar:

$$\mu^*(A) = \underbrace{\mu^*(A \cap \phi)}_{= \mu^*(\phi) = 0} + \mu^*(A \cap X)$$

• $E \in \mathfrak{M}_\mu \Rightarrow E^c \in \mathfrak{M}_\mu$ klar

• betrachte zunächst endliche Vereinigung, d.

$$E_1, E_2 \in \mathfrak{M}_\mu \overset{!}{\Rightarrow} E_1 \cup E_2 \in \mathfrak{M}_\mu$$

---

$$\mu^*(\underbrace{A \cap (E_1 \cup E_2)}_{(A \cap E_2) \cup (A \cap E_1 \cap E_2^c)}) + \mu^*(A \cap \underbrace{(E_1 \cup E_2)^c}_{E_1^c \cap E_2^c})$$

$$\overset{\text{Subadd.}}{\leq} \mu^*(A \cap E_2) + \underbrace{\mu^*(A \cap E_1 \cap E_2^c) + \mu^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c)}_{= \mu^*(A \cap E_2^c) \quad \text{da } E_1 \in \mathfrak{M}_\mu}$$

$$= \mu^*(A) \qquad \text{da } E_2 \in \mathfrak{M}_\mu$$

$$\Rightarrow \mu(A) \geq \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu^*(A \cap (E_1 \cup E_2)^c)$$

"$\leq$" wegen Subadditivität

$\Rightarrow$ "="

$\Rightarrow E_1 \cup E_2 \in \mathfrak{M}_\mu$

- betrachte nun abzählbare Vereinigung: (2-6)

$$F_1, F_2, \ldots \in \mathfrak{M}_\mu \overset{!}{\Longrightarrow} E := \bigcup_n F_n \in \mathfrak{M}_\mu$$

Setze $E_1 = F_1 \in \mathfrak{M}_\mu$

$$E_2 = F_2 \setminus E_1 = F_2 \cap F_1^c \in \mathfrak{M}_\mu$$

$$E_3 = F_3 \setminus E_2 = F_3 \cap E_2^c \in \mathfrak{M}_\mu$$

usw.

$\Rightarrow E_1, E_2, \ldots$ disjunkt und $E = \bigcup_n E_n$

Setze $G_n := \bigcup_{i=1}^n E_i$

Dann gilt für $A \subset X$: da $E_n \in \mathfrak{M}_\mu$

$$\mu^*(A \cap G_n) = \mu^*((A \cap \underbrace{G_n) \cap E_n}_{E_n}) + \mu^*((A \cap \underbrace{G_n) \cap E_n^c}_{G_{n-1}})$$

$$= \mu^*(A \cap E_n) + \mu^*(A \cap G_{n-1})$$

also gemäß Induktion:

$$\mu^*(A \cap G_n) = \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i)$$

Dann aber: $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap G_n) + \underbrace{\mu^*(A \cap G_n^c)}_{\geq \mu^*(A \cap E^c)}$ (da $E^c \subset G_n^c$)

$$\geq \sum_{i=1}^n \mu^*(A \cap E_i) + \mu^*(A \cap E^c)$$

$$\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \mu^*(A) \geq \underbrace{\sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A \cap E_i)} + \mu^*(A \cap E^c)$$ (2-

$$\geq \mu^*(A \cap E)$$

$\uparrow$

Subadditivität, da

$$A \cap E = \bigcup_i (A \cap E_i)$$

also: $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$

---

"$\leq$" gemäß Subadditivität

$\Rightarrow$ "$=$"

$\Rightarrow E \in \mathfrak{M}_\mu$

2) $\mu^*$ ist Maß auf $\mathfrak{M}_\mu$

- $\mu^*(\emptyset) = 0$ ✓

- zunächst endliche Add.: Betrachte

$E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$ mit $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

$$\Rightarrow \mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^*(\underbrace{(E_1 \cup E_2) \cap E_2}_{E_2}) + \mu^*(\underbrace{(E_1 \cup E_2) \cap E}_{E_1}$$

$$= \mu^*(E_2) + \mu^*(E_1)$$

- nun $\sigma$-Additivität: Betrachte $E = \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} E_i$ mit $E_i \in \mathfrak{M}_\mu \ \forall i$

$$\Rightarrow \mu^*(E) \underset{\text{Monotonie}}{\geq} \mu^*\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} E_i\right) \underset{\text{endl. Add.}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mu^*(E_i)$$

$$\overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} \mu^*(E) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$$

"$\leq$" gemäß Subadd.

$$\Rightarrow \mu^*(E) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$$

3) Betrachte $E \in \mathfrak{a}$ und $A \subset X$

z.z.: $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$

"$\leq$" folgt wegen Subadditivität

also z.z.: "$\geq$"

Wir können annehmen: $\mu^*(A) < \infty$

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{a}$ mit

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{und}$$

$$\mu^*(A) > \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) - \varepsilon$$

$\mu$ additiv auf $\mathfrak{a}$ $(A_n, E \in \mathfrak{a})$

$$\Rightarrow \mu(A_n) = \mu(A_n \cap E) + \mu(A_n \cap E^c)$$

$$\Rightarrow \mu^*(A)+\varepsilon > \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\mu(A_n \cap E)}_{=\mu^*(A_n \cap E)}}_{\geq \mu^*(\underbrace{\bigcup A_n \cap E}_{\supset A \cap E}) \geq \mu^*(A \cap E)} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap E^c)}_{\text{analog} \; \geq \mu^*(A \cap E^c)}$$

$$\Rightarrow \mu^*(A)+\varepsilon \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c) \quad \forall \varepsilon >$$

$$\overset{\varepsilon \searrow 0}{\Longrightarrow} \mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

also "="

$$\Rightarrow E \in \mathfrak{M}_\mu \qquad \forall E \in \mathfrak{A}$$

$$\Rightarrow \mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}_\mu$$

□

Somit haben wir bewiesen

<u>2.8. Satz (Carathéodory):</u> Sei $\mu$ ein Prämaß auf einer Algebra $\mathfrak{A}$. Dann ist die Einschränkung $\overline{\mu}$ von dem äußeren Maß $\mu^*$ auf die $\mu^*$-messbaren Mengen eine Ausdehnung von $\mu$ auf eine $\sigma$-Algebra welche $\mathfrak{A}$ enthält.

<u>2.9. Bemerkung</u>: Im allgemeinen ist $\mathfrak{M}_\mu$ größer als $\sigma(\mathfrak{A})$, aber nur wenig in "guten" Fällen: dann ist $\mathfrak{M}_\mu$ die Vervollständigung von $\sigma(\mathfrak{A})$ bzgl. $\mu$.

<u>2.10. Satz</u>: Sei $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ ein Maßraum.

Setze

$$\widetilde{\mathfrak{M}} := \{ E \subset X : \exists A, B \in \mathfrak{M} : A \subset E \subset B \text{ und } \mu(B \setminus A) = 0 \}$$

und

$$\tilde{\mu}(E) := \mu(A) \quad \text{in diesem Fall.}$$

Dann ist $\widetilde{\mathfrak{M}}$ eine $\sigma$-Algebra und $\tilde{\mu}$ ein Maß auf $\widetilde{\mathfrak{M}}$.

<u>Beweis</u>: direktes Nachrechnen
siehe Rudin 1.36 $\square$

<u>2.11. Definition</u>: $(X, \widetilde{\mathfrak{M}}, \tilde{\mu})$ heißt die <u>Vervollständigung</u> von $(X, \mathfrak{M}, \mu)$.

2.12. Definition: Ein Maß $\mu$ auf $(X, \mathfrak{A})$ ist [2-]

(i) ein Wahrscheinlichkeitsmaß falls $\mu(X) = 1$

(ii) endlich, falls $\mu(X) < \infty$

(iii) $\sigma$-endlich, falls $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ so dass

$X_n \in \mathfrak{A}$ und $\mu(X_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2.13 Bemerkungen: 1) $\sigma$-endliche Maße sind die guten; nicht $\sigma$-endliche Maße haben einige pathologischen Eigenschaften

2) Es gilt: Falls $\mu$ ein $\sigma$-endliches Prämaß auf einer Algebra $\mathfrak{A}$ ist, dann ist $\mathfrak{M}_\mu$ die Vervollständigung von $\sigma(\mathfrak{A})$ bzgl. $\overline{\mu}$.

2.14. Def.: 1) Die Anwendung des Ausdehnungssatzes 2.9 auf das Beispiel 2.3. ergibt das Lebesgue-Maß $\lambda$ auf $\mathbb{R}$. Es ist definiert entweder auf den Borelmengen, $\mathcal{B} = \sigma$(offene Mengen) oder auf seiner Vervollständigung $\mathfrak{M}_\lambda$, den Lebesgue-messbaren Mengen.

$\lambda$ ist also charakterisiert durch

$$\lambda([a,b]) = b-a$$

2) Das Lebesgue-Maß $\lambda$ auf dem $\mathbb{R}^k$ ergibt sich analog durch Ausdehnung von

$$\lambda(k\text{-dim. Quader}) = \text{Volumen}$$



2.15. Bemerkungen: 1) Beachte: $\lambda$ ist $\sigma$-endlich auf $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n] \quad \text{und} \quad \lambda([-n,n]) = 2n < \infty$$

2) Man benötigt das Auswahlaxiom um zu zeigen, dass

(i) es gibt nicht-messbare Mengen $E$,

$$E \subset \mathbb{R}, \quad E \notin \mathfrak{M}_\lambda$$

(ii) $\mathcal{B} \neq \mathfrak{M}_\lambda$