3. Der Satz über monotone Klassen und die Eindeutigkeit der Ausdehnung von Prämaßen

3.1. Definition: Eine Klasse $\mathcal{M}$ von Teilmengen von X heißt monoton, falls gilt:

i) $\left.\begin{array}{l} A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M} \\ \text{und } A_n \nearrow A \end{array}\right\} \Rightarrow A \in \mathcal{M}$

ii) $\left.\begin{array}{l} A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M} \\ \text{und } A_n \searrow A \end{array}\right\} \Rightarrow A \in \mathcal{M}$

3.2. Notationen: Sei $\mathcal{F}$ eine Familie von Teilmengen von X. Dann bezeichnen wir mit

$$\sigma(\mathcal{F}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{F} \subset \mathcal{A} \\ \mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra}}} \mathcal{A}$$
die von $\mathcal{F}$ erzeugte σ-Algebra

$$\mathcal{M}(\mathcal{F}) := \bigcap_{\substack{\mathcal{F} \subset \mathcal{M} \\ \mathcal{M} \text{ monotone Klasse}}} \mathcal{M}$$
die von $\mathcal{F}$ erzeugte monotone Klasse

3.3. Bem.: 1) Beachte: $\mathcal{P}(X)$ ist sowohl σ-Algebra und monotone Klasse und

$\bigcap$ σ-Algebren ist σ-Algebra

$\bigcap$ monotone Klassen ist monotone Klasse

2) Eine σ-Algebra ist eine monotone Klasse

$\Rightarrow \mathcal{M}(\mathcal{F}) \subset \sigma(\mathcal{F})$

3) $\left.\begin{array}{l} \mathcal{S} \text{ Algebra} \\ \mathcal{S} \text{ monoton} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{S}$ σ-Algebra

denn: Betrachte: $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{S}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow B_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{S} \\ B_n \nearrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \end{array}\right\} \overset{\mathcal{S} \text{ mon.}}{\Rightarrow} \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$$

<u>3.4. Satz über monotone Klassen:</u> Sei $\mathfrak{a}$ eine Algebra

1) $\sigma(\mathfrak{a}) = \mathcal{M}(\mathfrak{a})$

2) Sei $\mathcal{M}$ eine monotone Klasse, dann gilt:

$\mathfrak{a} \subset \mathcal{M} \Rightarrow \sigma(\mathfrak{a}) \subset \mathcal{M}$

<u>Beweis:</u> 2) $\mathfrak{a} \subset \mathcal{M} \Rightarrow \mathcal{M}(\mathfrak{a}) \subset \mathcal{M}$

$$\mathcal{M}(\mathfrak{a}) \overset{(1)}{=} \sigma(\mathfrak{a})$$

1) Setze $\mathcal{S} := \mathcal{M}(\mathfrak{a})$

Wir zeigen: $\mathcal{S}$ ist σ-Algebra; dann gilt

$$\left.\begin{array}{l} \sigma(\mathfrak{a}) \subset \mathcal{S} \\ \text{"}\supset\text{" nach 3.3.(2)} \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma(\mathfrak{a}) = \mathcal{M}(\mathfrak{a})$$

es genügt 2.2.: $\mathcal{S}$ ist Algebra, denn dann:

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{S} \text{ Algebra}\\ \mathcal{S} \text{ monoton}\end{array}\right\} \overset{3.3(3)}{\Longrightarrow} \mathcal{S}\ \sigma\text{-Algebra}$$

also 2.2.: $\mathcal{S}$ ist abgeschlossen unter Vereinigung und Komplement

betrachte Vereinigung:

wir wissen: $A \in \mathfrak{a}, B \in \mathfrak{a} \Rightarrow A \cup B \in \mathfrak{a}$

wir wollen: $A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{S}$

Fixiere zunächst $A \in \mathfrak{a}$, setze

$$\mathcal{C}(A) := \{ B \in \mathcal{S} \mid A \cup B \in \mathcal{S} \}$$

$$\left.\begin{array}{l}\mathfrak{a} \text{ Algebra}\\ \mathfrak{a} \subset \mathcal{S}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathfrak{a} \subset \mathcal{C}(A)$$

Betrachte nun

$B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{C}(A)$ mit $B_n \nearrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \ (\in \mathcal{S}$

$\Rightarrow A \cup B_1, A \cup B_2, \ldots \in \mathcal{S}$ und $A \cup B_n \nearrow A \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$

$$\mathcal{S} \text{ monoton} \Rightarrow A \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \in \mathcal{S}$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{C}(A)$$

analog für $B_n \searrow$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \mathcal{C}(A) \text{ ist monotone Klasse} \\ \text{und } \mathfrak{A} \subset \mathcal{C}(A)\end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{C}(A) \supset \mathcal{M}(\mathfrak{A}) = \mathcal{S}$$

"$\subset$" nach Def

$$\Rightarrow \mathcal{C}(A) = \mathcal{S} \quad \forall A \in \mathfrak{A}$$

somit: $A \in \mathfrak{A},\ B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{S}$

Fixiere jetzt $B \in \mathcal{S}$, setze

$\mathcal{C}(B) := \{A \in \mathcal{S} \mid A \cup B \in \mathcal{S}\}$

gemäß oben $\Rightarrow \mathfrak{A} \subset \mathcal{C}(B)$

wie oben folgt: $\mathcal{C}(B)$ ist monoton

$\Rightarrow \mathcal{C}(B) = \mathcal{S}$

also: $A \in \mathcal{S},\ B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{S}$

analog für Komplement

$\Rightarrow \mathcal{S}$ ist Algebra $\square$

3.5 Satz (Eindeutigkeit der Ausdehnung von Maßen)

Sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra und μ_1, μ_2 zwei σ-endliche Maße auf $\sigma(\mathfrak{A})$. Dann gilt:

$$\mu_1|\mathfrak{A} = \mu_2|\mathfrak{A} \Rightarrow \mu_1 = \mu_2 \text{ auf } \sigma(\mathfrak{A})$$

<u>Beweis:</u> 1) Betrachte zunächst endliche μ_1, μ_2

Setze $\mathcal{M} := \{ A \in \sigma(\mathfrak{a}) \mid \mu_1(A) = \mu_2(A) \}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{gemäß Voraussetz.: } \mathfrak{a} \subset \mathcal{M} \\ \text{wir zeigen } \quad : \mathcal{M} \text{ monoton}\end{array}\right\} \overset{3.4.}{\Longrightarrow} \sigma(\mathfrak{a}) \subset \mathcal{M}$$

d.h. $\sigma(\mathfrak{a}) = \mathcal{M}$

z.z.: $\mathcal{M}$ monoton

Betrachte $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ mit $A_n \nearrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

$$\Rightarrow \mu_1\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim_{i \to \infty} \underbrace{\mu_1(A_i)}_{= \mu_2(A_i) \ \forall i}$$

$$= \lim_{i \to \infty} \mu_2(A_i)$$

$$= \mu_2\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big)$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$$

analog für $A_n \searrow$

(beachte dabei Voraussetzung $\mu(A_n) < \infty$ in 1.4. ist erfüllt, da μ_1, μ_2 endlich)

2) Führe σ-endlichen Fall auf endlichen Fall zurück durch Einschränkung von μ_1, μ_2 auf X_n, wobei $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$.

3.6. Bemerkungen: 1) Eindeutigkeit der Ausdehnu[ng] gilt nicht für allgemeine nicht σ-endliche Maße. $\rightsquigarrow$ Übungsaufgabe

2) 3.5. und 2.13(2) zeigen, dass das Lebesguemaß λ, sowohl auf $\mathcal{B}$ als auch auf $\mathfrak{M}_\lambda$, eindeut[ig] durch seine Werte auf Intervallen bestimm[t] ist.

3) Satz über monotone Klassen ist wichtiges Werkzeug, um Aussagen von "einfachen" auf "komplizierte" Mengen fortzusetzen. Oft werden stattdessen auch "Dynkinsysteme" und π-λ-Systeme benutzt.

$\rightarrow$ Übungsaufgabe