4. Die Vektorräume $C_c(X)$, $C_0(X)$ und der Rieszsche Darstellungssatz

4.1. Def.: Sei X ein topologischer Raum (siehe 1.

1) $K \subset X$ heißt *kompakt*, falls jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

2) Eine *Umgebung* von $x \in X$ ist eine Menge N so dass es ein offenes U gibt mit $x \in U \subset N$

3) X ist *lokalkompakt*, falls jedes $x \in X$ eine kompakte Umgebung besitzt.

4) X ist *Hausdorff* falls gilt: für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es Umgebungen N_x von x und N_y von y, so dass

$$N_x \cap N_y = \emptyset$$

4.2. Beispiele: $X = \mathbb{R}$ ist lokalkompakt, aber nicht kompakt

$[0,1] \subset \mathbb{R}$ ist kompakt

alle metrischen Räume sind Hausdorff

X Banachraum: lokalkompakt $\Leftrightarrow$ endlichdimensional

4.3. Notation: Sei X ein lokalkompakter Hausdorff-Raum. Dann setzen wir

$$C_c(X) := \{ f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig und } \operatorname{supp} f \text{ kompakt} \}$$

wobei

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{ x \mid f(x) \neq 0 \}} \qquad \text{Träger von } f$$

und

$$C_0(X) := \{ f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig und } \forall \varepsilon > 0 \; \exists \text{ kompaktes } K \text{ s.d. } |f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \notin K \}$$

$C_c(X) \mathrel{\hat{=}}$ stetige Fkten mit kompaktem Träger

$C_0(X) \mathrel{\hat{=}}$ stetige Fkten welche im Unendlichen verschwinden

Beachte: Ist X kompakt, dann gilt:

$$C_c(X) = C_0(X) = C(X)$$

4.4. Bemerkungen: 1) $C_c(X)$ und $C_0(X)$ sind Vektorräume über $\mathbb{C}$; falls X unendliche Menge ist, so sind sie unendlich-dimensional.

2) $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$ definiert eine Norm auf $C_c(X)$ und auf $C_0(X)$

3) $C_0(X)$ ist vollständig bzgl. $\|\cdot\|_\infty$, also ein Banachraum; $C_c(X)$ ist im allgemeinen (falls X nicht kompakt ist) nicht vollständig, und es gilt

$$C_0(X) = \overline{C_c(X)}^{\|\cdot\|_\infty}$$

4.5. Bemerkung: Sei μ Borel-Maß auf X (d.h. Maß auf Borel-σ-Algebra) so dass

$\mu(K) < \infty$ für alle kompakten $K \subset X$.

Dann ist f integrierbar für alle $f \in C_c(X)$:

$$\int_X |f| \, d\mu = \int_{\operatorname{supp} f} |f| \, d\mu \leq \int_{\operatorname{supp} f} \|f\|_\infty \, d\mu$$

$$= \mu(\operatorname{supp} f) \cdot \|f\|_\infty < \infty$$

und $\int\limits_X : C_c(X) \to \mathbb{C}$

$$f \mapsto \int\limits_X f \, d\mu$$

ist ein lineares Funktional.

Es ist auch positiv:

$$f \geq 0 \implies \int f \, d\mu \geq 0$$

Der Rieszsche Darstellungsatz sagt, dass alle positiven linearen Funktionale von der Form sind!

<u>4.6. Rieszsche Darstellungsatz</u>: Sei X ein lokalkompakter Hausdorff-Raum, und

$\Lambda : C_c(X) \to \mathbb{C}$

ein positives lineares Funktional auf $C_c(X)$

Dann gibt es ein Borel-Maß μ auf X s.d.

$$(*) \quad \Lambda(f) = \int\limits_X f \, d\mu \qquad \forall f \in C_c(X)$$

μ hat die folgenden Regularitätseigenschaften

(i) $\mu(K) < \infty \quad \forall$ kompakten $K \subset X$

(ii) $\mu(E) = \inf\{\mu(V) \mid E \subset V,\ V \text{ offen}\}$ $\forall E \in \mathcal{B}$

(iii) $\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset E,\ K \text{ kompakt}\}$ $\forall E \in \mathcal{B}$ mit $\mu(E) < \infty$

Zusammen mit (*) bestimmen diese Reg. Eigenschaften das Maß μ eindeutig.

<u>4.7. Bemerkung:</u> In vielen Situationen (wie X kompakt oder $X = \mathbb{R}$) gilt: ein Borel-Maß, welches (i) erfüllt, erfüllt auch (ii) und (iii)

<u>Beweisskizze:</u> $\mu(E) \mathrel{\hat=} \Lambda(1_E)$

- approximiere 1_E durch stetige Fkten
- beachte: Positivität von $\Lambda \mathrel{\hat=}$ Stetigkeitseigensch
- es reicht $\mu(V)$ für V offen zu kennen, dafür setze

$$\mu(V) := \sup\{\Lambda(f) \mid f \in C_c(X),\ 0 \le f \le 1_V\}$$

überprüfe sehr viele Einzelheiten!

$\rightarrow$ Rudin 2.14 oder Royden Chap 13, Th 23

<u>4.8 Bemerkung:</u> Beachte: Λ dehnt im allgemeinen nicht auf $C_0(X)$ aus.

<u>Beispiel:</u> λ Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}$

$$\Lambda(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\lambda(x)$$

Betrachte
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & |x| \geq 1 \\ 1 & |x| < 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow f \in C_0(\mathbb{R})$ (aber $f \notin C_c(\mathbb{R})$)

aber $\int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda = +\infty$

Allgemeinen gilt: Sei

$$\Lambda : C_0(X) \to \mathbb{C}$$

ein positives lineares Funktional. Dann ist

$$\|\Lambda\| := \sup_{\substack{f \in C_0(X) \\ f \neq 0}} \frac{|\Lambda(f)|}{\|f\|} = \sup_{\substack{f \in C_0(X) \\ \|f\| = 1}} |\Lambda(f)| < \infty$$

und Λ ist somit beschränkt, also stetig.

Somit gilt dann aber:

$$\mu(X) = \sup \{ \underbrace{\Lambda(f)}_{\leq \|\Lambda\| \cdot \underbrace{\|f\|}_{\leq 1}} \mid f \in C_c(X),\ 0 \leq f \leq 1 \} \leq \|\Lambda\| < \infty$$

Somit sind die positiven linearen Funktionale auf $C_0(X)$ durch endliche Borel-Maße gegeben.

<u>4.9 Satz:</u> Sei $\Lambda : C_0(X) \to \mathbb{C}$ ein positives lineares Funktional. Dann ist Λ beschränkt, d.h. $\|\Lambda\| < \infty$.

<u>Beweis:</u> Annahme: Λ ist nicht beschränkt

$\Rightarrow \exists f_n \in C_0(X) : \|f_n\| \leq 1$

$$|\Lambda(f_n)| \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

Wegen der Zerlegung

$$f = (\mathrm{Re} f)^+ - (\mathrm{Re} f)^- + i\left[(\mathrm{Im} f)^+ - (\mathrm{Im} f)^-\right]$$

finden wir dann auch solche Folge wo alle $f_n \geq 0$.

Durch Übergang zu Teilfolge können wir annehmen

$$\Lambda(f_n) \geq 2^n$$

Dann setze

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{2^n} \in C_0(X)$$

ist Cauchyfolge und konvergiert somit da $C_0(X)$ vollständig

Dann gilt aber:

$$\mathbb{R} \ni \Lambda(f) \geq \Lambda\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{f_n}{2^n}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\frac{\Lambda(f_n)}{2^n}}_{\geq 1}$$

$$\geq N \qquad \forall N \in \mathbb{N}$$

Wdsp

$\Rightarrow \|\Lambda\| < \infty$ $\square$