5. Produktmaße und Satz von Fubini

5.1. Def.: X, Y seien zwei Mengen

1) Das <u>kartesische Produkt</u> $X \times Y$ ist die Menge

$$X \times Y := \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

Eine Menge der Form $A \times B \subset X \times Y$ für $A \subset X$, $B \subset Y$ heißt <u>Rechteck</u> in $X \times Y$.

2) Sei $\mathcal{X}$ eine σ-Algebra auf X und $\mathcal{Y}$ eine σ-Algebra auf Y. Ein <u>meßbares Rechteck</u> ist dann eine Menge der Form

$A \times B$ mit $A \in \mathcal{X}$, $B \in \mathcal{Y}$.

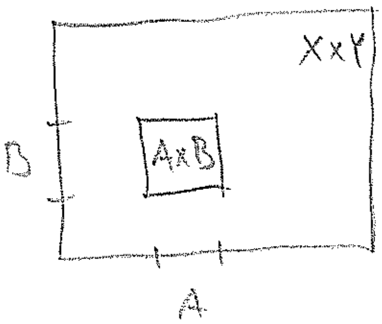
Die zugehörige <u>Produkt-σ-Algebra</u> ist definiert als

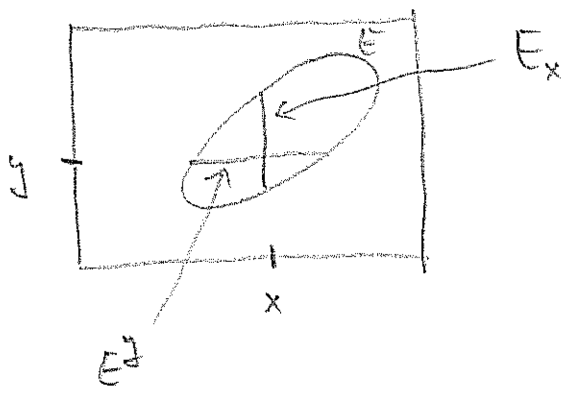
$$\mathcal{X} \times \mathcal{Y} := \sigma(\{A \times B \mid A \in \mathcal{X}, B \in \mathcal{Y}\})$$

3) Für $E \subset X \times Y$, $x \in X$, $y \in Y$ setzen wir

$$E_x := \{y \mid (x,y) \in E\} \subset Y$$

$$E^y := \{x \mid (x,y) \in E\} \subset X$$





Im Folgenden sind $(X, \mathcal{X})$ und $(Y, \mathcal{Y})$ fixiert.

5.2. Satz: Setze

$$\mathfrak{a} := \{ Q = R_1 \cup .. \cup R_n \mid n \in \mathbb{N},\ R_i \text{ messbare Rechtecke } \forall i,\ R_i \cap R_j = \emptyset \quad i \neq j \}$$

Dann ist $\mathfrak{a}$ eine Algebra und somit gilt:

$$\mathcal{X} \times \mathcal{Y} = \mathcal{M}(\mathfrak{a})$$

Beweis: z.z.: $\mathfrak{a}$ ist Algebra, d.h.

i) $Q \in \mathfrak{a} \Rightarrow Q^c \in \mathfrak{a}$

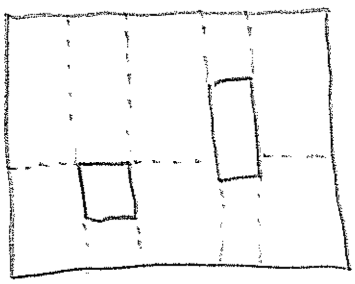
ii) $Q_1, Q_2 \in \mathfrak{a} \Rightarrow Q_1 \cup Q_2 \in \mathfrak{a}$

i) $n = 1$: $R = A \times B$

$$\Rightarrow R^c = A^c \times B \cup A \times B^c \cup A^c \times B^c$$

$A \times B^c$	$A^c \times B^c$
$A \times B$	$A \times B^c$

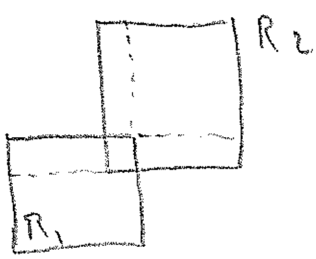
$n = 2$



usw.

ii) z.B. $Q_1 = R_1$

$Q_2 = R_2$



$\Rightarrow \mathfrak{a}$ Algebra

$\mathfrak{a}$ Algebra

$$\overset{\text{Monotones}}{\underset{\text{Klassentheorem}}{\Longrightarrow}} \quad \sigma(\mathfrak{a}) = \mathcal{M}(\mathfrak{a})$$
$$\quad\quad\quad \shortparallel$$
$$\quad\quad\quad \mathcal{X}\times\mathcal{Y} \qquad \square$$

<u>5.3. Satz:</u> Für $E \in \mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ gilt:

$$E_x \in \mathcal{Y} \quad \forall x \in X \quad \text{und} \quad E^y \in \mathcal{X} \quad \forall y \in Y$$

<u>Beweis:</u> Setze

$$\mathcal{F} := \{E \in \mathcal{X}\times\mathcal{Y} \mid E_x \in \mathcal{Y} \ \forall x \in X\}$$

zeige: i) {messb. Rechtecke} $\subset \mathcal{F}$
ii) $\mathcal{F}$ σ-Algebra

$$\Big\} \Rightarrow \sigma(\text{messb. R.}) \subset \mathcal{F}$$
$$\shortparallel$$
$$\mathcal{X}\times\mathcal{Y}$$

$$\Rightarrow \mathcal{X}\times\mathcal{Y} = \mathcal{F}$$

zu i) $E = A \times B \quad (A \in \mathcal{X}, B \in \mathcal{Y})$

$$\Rightarrow E_x = \begin{cases} B & x \in A \\ \emptyset & x \notin A \end{cases}$$

$$\Rightarrow E_x \in \mathcal{Y} \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow E \in \mathcal{F}$$

zu ii) klar, da

$$(E^c)_x = (E_x)^c \quad \text{und} \quad (\bigcup E_i)_x = \bigcup (E_i)_x$$

für E^y analog. $\square$

5.4. Notation: Sei $f : X \times Y \to \mathbb{C}$. Wir setzen

$$f_x : Y \to \mathbb{C} \qquad (x \in X)$$
$$y \mapsto f_x(y) = f(x,y)$$

und

$$f^y : X \to \mathbb{C} \qquad (y \in Y)$$
$$x \mapsto f_y(x) = f(x,y)$$

5.5. Satz: Sei $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ eine $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y})$-messbare Fkt auf $X \times Y$. Dann ist f_x für jedes $x \in X$ eine $\mathcal{Y}$-messbare Fkt auf Y und f^y für jedes $y \in Y$ eine $\mathcal{X}$-messbare Fkt auf X.

Beweis: genügt reellwertige Fkten zu betrachten

Sei $B \subset \mathbb{R}$ Borelmenge

z.z.: $f_x^{-1}(B) \in \mathcal{Y}$

$$f_x^{-1}(B) = \{ y \mid \underset{= f(x,y)}{f_x(y)} \in B \}$$
$$= \{ (\tilde{x}, \tilde{y}) \mid f(\tilde{x}, \tilde{y}) \in B \}_x$$
$$= \left(f^{-1}(B) \right)_x$$

f messbar $\Rightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$

$$\overset{5.3}{\Rightarrow} (f^{-1}(B))_x \in \mathcal{Y}$$

also: $f_x^{-1}(B) \in \mathcal{Y} \quad \forall B \in \mathcal{B}$

$\Rightarrow f_x$ $\mathcal{Y}$-messbar

analog für f^y $\square$

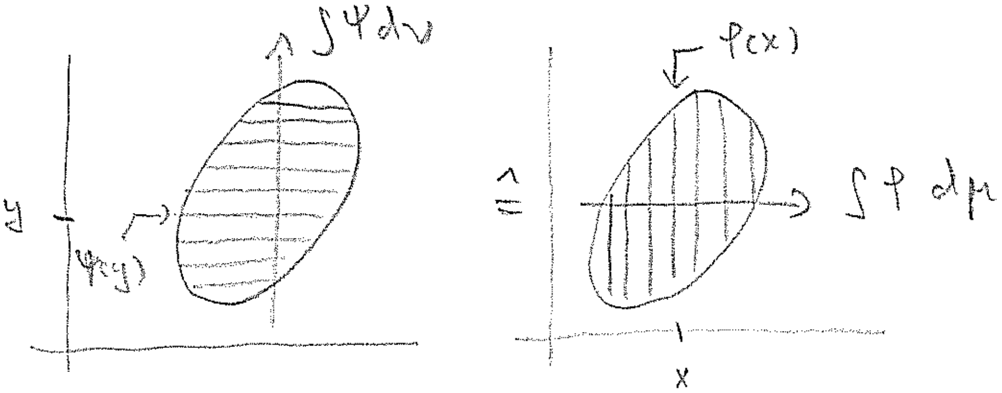
5.6. Satz: Seien $(X, \mathcal{X}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ σ-endliche Maßräume. Für $Q \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ setze

$$\varphi(x) := \nu(Q_x) \qquad (x \in X)$$

$$\psi(y) := \mu(Q^y) \qquad (y \in Y)$$

Dann ist $\varphi: X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{X}$-messbar und $\psi: Y \to \mathbb{R}$ $\mathcal{Y}$-messbar, und es gilt

$$\int_X \varphi \, d\mu = \int_Y \psi \, d\nu$$



5.7. Definition: Für $Q \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ setzen wir

$$(\mu \times \nu)(Q) := \int_X \nu(Q_x) \, d\mu(x) = \int_Y \mu(Q^y) \, d\nu(y)$$

$\mu \times \nu$ heißt Produktmaß von μ und ν.

5.8. Satz: Seien $(X, \mathcal{X}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ σ-endliche Maßräume. Dann ist $\mu \times \nu$ ein σ-endliches Maß auf $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$; es ist eindeutig bestimmt durch

$$\mu \times \nu (A \times B) = \mu(A) \nu(B) \qquad \forall A \in \mathcal{X}, B \in \mathcal{Y}$$

Falls μ und ν endlich sind, so gilt dies auch für $\mu \times \nu$.

Beweis von 5.6: wir betrachten nur Fall μ, ν endlich

Setze

$$\mathcal{F} := \{ Q \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \mid \text{Beh. des Satzes gilt für } Q \}$$

2.2.1 i) $\mathcal{O} \subset \mathcal{F}$

ii) $\mathcal{F}$ ist monotone Klasse

$\Rightarrow \mathcal{X} \times \mathcal{Y} = \mathcal{M}(\mathcal{O}) = \mathcal{F}$

i) Betrachte zunächst $Q = R = A \times B \qquad (A \in \mathcal{X}, B \in \mathcal{Y})$

$$\Rightarrow Q_x = \begin{cases} B & x \in A \\ \phi & x \notin A \end{cases} \qquad Q^y = \begin{cases} A & y \in B \\ \phi & y \notin B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \nu(Q_x) = \nu(B) \cdot 1_A(x)$$

$$\psi(y) = \mu(Q^y) = \mu(A) \cdot 1_B(y)$$

$\Rightarrow \varphi, \psi$ messbar und

$$\int_X \varphi \, d\mu = \nu(B) \int_X 1_A(x) \, d\mu(x) = \nu(B) \cdot \mu(A)$$

$$\int_Y \psi \, d\nu = \mu(A) \int_Y 1_B(y) \, d\nu(y) = \mu(A) \cdot \nu(B)$$

$\Rightarrow Q \in \mathcal{F}$

Betrachte nun $Q = R_1 \cup .. \cup R_n$, wobei:

R_i disjunkte messbare Rechtecke

ähnlich zu oben $\Rightarrow Q \in \mathcal{F}$
(beachte dabei: $Q_x = (R_1)_x \cup .. \cup (R_n)_x$ ist disj. Vereinigung $\forall x \in X$)

ii) Betrachte

$$\left.\begin{array}{l} Q_i \nearrow Q = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \\ Q_i \in \mathcal{F} \quad \forall i \end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow} Q \in \mathcal{F}$$

Sei $\varphi_i(x) = \nu(Q_{i,x})$. $\quad \varphi(x) = \nu(Q_x)$

$\psi_i(y) = \mu(Q_i^y) \quad \psi(y) = \mu(Q^y)$

$$(Q_i)_x \nearrow Q_x \Rightarrow \underbrace{\nu(Q_{i,x})}_{=\varphi_i(x)} \longrightarrow \underbrace{\nu(Q_x)}_{=\varphi(x)}$$

somit: $\varphi_i(x) \nearrow \varphi(x) \quad \forall x \in X$

analog: $\psi_i(y) \nearrow \psi(y) \quad \forall y \in Y$

φ_i, ψ_i messbar $\forall i \Rightarrow \varphi, \psi$ messbar

Satz von monotoner Konvergenz

$$\Rightarrow \int_X \varphi_i \, d\mu \longrightarrow \int_X \, d\mu \qquad \Rightarrow \int_X \varphi \, d\mu = \int_Y \psi \, d\nu$$

$$\overset{\parallel}{\int \psi_i \, d\nu} \longrightarrow \int \psi \, d\nu \qquad \Rightarrow Q \in \mathcal{F}$$

analog für $Q_i \searrow$

(beachte dabei, dass ν, μ endlich)

$\Rightarrow \mathcal{F}$ ist monotone Klasse $\square$

Beweis von 5.8.: i) $\mu \times \nu$ ist Maß

Sei Q_i ($i \in \mathbb{N}$) disjunkt

$$\Rightarrow (\mu\times\nu)(\dot\bigcup Q_i) = \int_X \nu(\underbrace{\underbrace{(\dot\bigcup Q_i)_x}_{\dot\bigcup Q_{i,x}}}_{\sum \nu(Q_{i,x})})\, d\mu(x)$$

$$= \sum \underbrace{\int \nu(Q_{i,x})\, d\mu(x)}_{\mu\times\nu(Q_i)}$$

Satz von monot. Konvergenz

ii) $\mu\times\nu$ σ-endlich:

$X = \bigcup X_n$

$Y = \bigcup Y_n$

$\Rightarrow X \times Y = \bigcup X_n \times Y_n$

und $\mu\times\nu(X_n \times Y_n) = \underbrace{\mu(X_n)\cdot\mu(Y_n)}_{<\infty}$

iii) μ, ν endlich $\Rightarrow$ $\mu\times\nu$ endlich, da

$\mu\times\nu(X\times Y) = \mu(X)\cdot\mu(Y)$

iv) $\mu\times\nu$ ist durch $\mu\times\nu(A\times B) = \mu(A)\cdot\nu(B)$ auf Algebra $\mathfrak{a}$ bestimmt und somit, nach Ausdehnungssatz 3.5 auf $\sigma(\mathfrak{a}) = \mathcal{X}\times\mathcal{Y}$ $\square$

5.9. Bemerkung: Sei λ^n das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}^n$. Dies war nach 2.14 def. durch

$$\lambda^n(n\text{-dim. Quader}) = \text{Volumen des Quaders}$$

Somit gilt nach 5.8.

$$\lambda^{m+n} = \lambda^m \otimes \lambda^n,$$

insbesondere

$$\lambda^n = \bigotimes_{i=1}^{n} \lambda$$

5.10. Satz von Fubini: Seien $(X, \mathfrak{X}, \mu)$ und $(Y, \mathcal{Y}, \nu)$ σ-endliche Maßräume und f eine $\mathfrak{X}\times\mathcal{Y}$-messbare Fkt auf $X\times Y$.

1) Sei $0 \le f \le \infty$. Setze

$$\varphi(x) := \int_Y f_x \, d\nu \qquad (x \in X)$$

$$\psi(y) := \int_X f^y \, d\mu \qquad (y \in Y)$$

Dann ist φ $\mathfrak{X}$-messbar, ψ $\mathcal{Y}$-messbar und

$$(*) \qquad \int_X \varphi \, d\mu = \int_{X\times Y} f \, d(\mu\times\nu) = \int_Y \psi \, d\nu$$

$$\begin{matrix} \| & & \| \\ \int_X \left(\int_Y f(x,y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) & & \int_Y \left(\int_X f(x,y) \, d\mu(x) \right) d\nu \end{matrix}$$

2) Ist f komplexwertig und

$$\int_X \left(\int_Y |f(x,y)| \, d\nu(y) \right) d\mu(x) < \infty,$$

dann ist $f \in L^1(\mu\times\nu)$.

3) Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mu \times \nu)$. Dann ist $f_x \in \mathcal{L}^1(\nu)$ für fast alle $x \in X$, $f^y \in \mathcal{L}^1(\mu)$ für fast alle $y \in Y$, und die Fkten φ und ψ, definiert gemäß (1) f.ü., sind in $\mathcal{L}^1(\mu)$ bzw. $\mathcal{L}^1(\nu)$, und $(*)$ gilt.

Beweis: 1) S.S. $\Rightarrow$ f_x, f^y messbar

$\Rightarrow$ φ, ψ wohl-definiert

($+\infty$ als Wert zugelassen)

Betrachte zunächst $f = 1_Q$ für $Q \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$

$$\Rightarrow \int_{X \times Y} f \, d(\mu \times \nu) = \mu \times \nu(Q)$$

$$\int_X \Big(\underbrace{\int_Y f(x,y) \, d\nu(y)}_{\nu(Q_x)} \Big) d\mu(x) = \int_X \nu(Q_x) \, d\mu(x)$$

$$\int_Y \Big(\underbrace{\int_X f(x,y) \, d\mu(x)}_{\mu(Q^y)} \Big) d\nu(y) = \int_Y \mu(Q^y) \, d\nu(y)$$

$\Rightarrow$ Beh. folgt aus Satz 5.6 und Def. 5.7.

Betr. Linearkombinationen $\Rightarrow$ Beh. folgt für nicht-negative einfache Fkten

allgemeines $f \geq 0$: gemäß 117. gibt es einfache $s_n \geq 0$, so dass $s_n \nearrow f$ punktweise (d.h. $s_n(x,y) \nearrow f(x,y)$ $\forall x \in X, y \in Y$)

Setze $\varphi_n(x) := \int_Y (s_n)_x \, d\nu$

$$\overset{\text{monotone}}{\underset{\text{konvergenz}}{\Longrightarrow}} \varphi_n(x) \nearrow \varphi(x) \quad \forall x \in X$$

nach oben gilt:

$$\int_X \varphi_n \, d\mu = \int_{X\times Y} s_n \, d(\mu\times\nu)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \quad \text{monotone Konv}$$

$$\int_X \varphi \, d\mu \qquad\qquad \int_{X\times Y} f \, d(\mu\times\nu)$$

$$\Rightarrow \int_X \varphi \, d\mu = \int_{X\times Y} f \, d(\mu\times\nu)$$

analog für ψ

(2) Wende (1) auf $|f|$ an

(3) genügt, reellwertiges f zu betrachten

Zerlege $f = f^+ - f^-$

$$\begin{array}{ccc} f & f^+ & f^- \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\ \varphi & \varphi_1 & \varphi_2 \end{array}$$

(beachte: $\varphi_1, \varphi_2 \geq 0$)

$$\Rightarrow \int_X \varphi_1 \, d\mu = \int_{X \times Y} f^+ \, d(\mu \times \nu) \leq \int_{X \times Y} |f| \, d(\mu \times \nu) < \infty$$

da $f \in L^1(\mu$

$\Rightarrow \varphi_1 \in L^1(\mu)$

analog: $\varphi_2 \in L^1(\mu)$

$f_x = (f^+)_x - (f^-)_x$

$$\Rightarrow \int_Y f_x \, d\nu = \underbrace{\int_Y (f^+)_x \, d\nu}_{\varphi_1(x)} - \underbrace{\int_Y (f^-)_x \, d\nu}_{\varphi_2(x)}$$

falls $\varphi_1(x) < \infty$ und $\varphi_2(x) < \infty$

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1 \in L^1(\mu) \Rightarrow \varphi_1(x) < \infty \text{ f.ü.} \\ \varphi_2 \in L^1(\mu) \Rightarrow \varphi_2(x) < \infty \text{ f.ü.} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x) \text{ f.ü}$$

$\Rightarrow \varphi \in L^1(\mu)$

$$(1) \Rightarrow \int_X \varphi_1 \, d\mu = \int_{X\times Y} f^+ \, d(\mu\times\nu) < \infty$$

$$\int_X \varphi_2 \, d\mu = \int_{X\times Y} f^- \, d(\mu\times\nu) < \infty$$

$$\Rightarrow \int_X \underbrace{(\varphi_1 - \varphi_2)}_{\varphi \text{ f.ü.}} \, d\mu = \int_{X\times Y} \underbrace{(f^+ - f^-)}_{f} \, d(\mu\times\nu)$$

$$\| $$

$$\int_X \varphi \, d\mu$$

für ψ analog □

5.11. Beispiel: Berechnung von

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \, dx = ?$$

Betrachte

$$\int_0^\infty \int_0^\infty y e^{-(1+x^2)y^2} \, dy \, dx = \int_{[0,\infty)\times[0,\infty)} f(y,x) \, d\lambda^2(y,x)$$

wobei $f(y,x) = y e^{-(1+x^2)y^2} \geq 0$ auf $[0,\infty)\times[0,\infty)$

Fubini $\Rightarrow$ $$\underbrace{\int_0^\infty \left(\int_0^\infty y e^{-(1+x^2)y^2} \, dy \right) dx}_{= (1)} = \underbrace{\int_0^\infty \left(\int_0^\infty y e^{-(1+x^2)y^2} \, dx \right) d}_{= (2)}$$

$$(2) = \int_0^\infty \Big(\underbrace{\int_0^\infty e^{-x^2y^2}\,dx}_{\frac{1}{y}\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt} \Big)\, y \cdot e^{-y^2}\,dy$$

gemäß Substitution

$xy \rightarrow t$

$dx \rightarrow \frac{1}{y}\,dt$

$$= \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt \cdot \int_0^\infty e^{-y^2}\,dy$$

$$= \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx \right)^2$$

$$(1) = \int_0^\infty \Big(\underbrace{\int_0^\infty y\, e^{-(1+x^2)y^2}\,dy}_{} \Big)\,dx$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2}\left[e^{-(1+x^2)y^2} \right]_{y=0}^{y=\infty} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\arctan x \Big|_0^\infty = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$(1) = (2) \implies \int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$