6. Bildmaße und Transformationsformel

6.1. Motivation: Für Integration in $\mathbb{R}$ haben wir die Substitutionsformel

$$\int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx$$

Frage: Gilt es dazu allgemeines Analogon?

zunächst abstrakte Version

6.2. Satz und Def: Seien $(X, \mathfrak{A})$ und $(Y, \mathfrak{M})$ messbare Räume und

$$T : X \to Y$$

eine messbare Abbildung. Für ein Maß μ auf $\mathfrak{A}$ definieren wir $T(\mu)$ durch

$$T(\mu)(A) = \mu(T^{-1}(A)) \qquad (A \in \mathfrak{M})$$

Dann ist $T(\mu)$ ein Maß auf $\mathfrak{A}$.

Es heißt <u>Bildmaß</u> von μ.

<u>Beweis:</u> $T(\mu)(\emptyset) = \mu(T^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$

$$T(\mu)(\dot\bigcup A_i) = \mu(\underbrace{T^{-1}(\dot\bigcup A_i)}_{\dot\bigcup T^{-1}(A_i)})$$

$$= \sum \mu(T^{-1}(A_i)) = \sum T\mu(A_i)$$

$\square$

6.3. Satz: Seien $(X, \mathfrak{A})$, $(Y, \mathfrak{M})$, T, μ wie in 6.2. und $T(\mu)$ Bildmaß von μ bzgl. $T : X \to Y$. Betrachte eine messbare Fkt $f : Y \to \mathbb{C}$

Dann sind äquivalent:

(i) $f : Y \to \mathbb{C}$ ist integrierbar bzgl. $T(\mu)$

(ii) $f \circ T : X \to \mathbb{C}$ — " — μ

In diesem Fall gilt:

$$\int_Y f(y) \, dT(\mu)(y) = \int_X f(T(x)) \, d\mu(x)$$

Beweis: Übungsaufgabe! $\square$

6.4. Bemerkung: Satz erlaubt das Integral $\int_X f(T(x)) \, d\mu(x)$ durch Substitution $y = T(x)$ auf "einfacheres" Integral zurückzuführen, allerdings bzgl des Bildmaßes $T(\mu)$. Solange wir letzteres nicht kennen, ist dies nicht sehr hilfreich. Im Fall $X = Y = \mathbb{R}^n$ und $\mu = \lambda^n$ können wir $T(\lambda^n)$ mit Hilfe einer Dichte wieder durch λ^n ausdrücken.

<u>6.5. Def.:</u> Seien μ, ν zwei Maße auf einer σ-Algebra $\mathfrak{a}$ auf X. Sei
$h : X \to [0, \infty]$ messbar.

Falls

$$\nu(E) = \int_E h \, d\mu \qquad \forall E \in \mathfrak{a},$$

so sagen wir: ν <u>hat Dichte h</u> bzgl. μ

Bezeichnung: $d\nu = h \, d\mu$

oder $h = \dfrac{d\mu}{d\nu}$

<u>6.6. Bem:</u> 1) Dichte h ist f.s. eindeutig bestimmt:

$$\int_E h_1 \, d\mu = \int_E h_2 \, d\mu \qquad \forall E \in \mathfrak{a}$$

$$\Longrightarrow h_1 = h_2 \quad \mu\text{-f.s.}$$

2) Beachte: h muss nicht integrierbar bzgl μ sein;

$$h \in L^1(\mu) \iff \nu(X) = \int_X h \, d\mu < \infty$$

$$\iff \nu \text{ endlich}$$

3) $\leadsto$ Satz von Radon-Nikodym

6.7. Satz: Sei $d\nu = h\,d\mu$. Dann gilt

für messbares $f \geq 0$:

$$(*) \quad \int f\,d\nu = \int f h\,d\mu$$

Weiterhin, für allgemeines messbares f gilt:

$$f \in L^1(\nu) \iff f h \in L^1(\mu)$$

und dann gilt auch $(*)$.

Beweis: übliche Vorgehensweise

für $f = 1_E$ ist $(*)$ die Def. 6.5,

Rest folgt durch Linearkombination

und Approximation gemäß monotoner Konvergenz.

6.8. Motivation: Betrachte

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

Frage: Hat Bildmaß $T(\lambda^n)$ eine Dichte

bzgl. λ^n?

D.h. gilt: $T(\lambda^n)(A) = \int_A h\,d\lambda^n$?

$$\| \qquad\qquad\qquad$$

$$\lambda^n(T^{-1}(A))$$

Dies kann nur gelten, falls T Mengen von Maß $\neq 0$ nicht auf Nullmengen zusammendrückt; T sollte also invertierbar und hinreichend regulär sein.
Im folgenden werden wir T durch T^{-1} ersetzen und betrachten

$$\lambda^n(T(A)) = ?$$

Zunächst betrachten wir lineare Fkt

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, d.h. $T \hat{=}$ Matrix

Dann hat $\lambda^n \circ T$ konstante Dichte

<u>6.9. Satz:</u> Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineare invertierbare Abbildung. Dann gilt

$$\lambda^n(T(A)) = |\det T| \cdot \lambda^n(A) \quad \forall A \in \mathcal{B}^n$$

Insbesondere:

$$\mathrm{Vol}(T([0,1]^n)) = |\det T|$$

[Durch Bildmaß ausgedrückt:

$$T(\lambda^n) = \frac{1}{|\det T|} \cdot \lambda^n$$

beachte: T invertierbar $\Rightarrow \det T \neq 0$]

Beweis: Definiere auf $\mathcal{B}^n$ die zwei Maße

$$\mu_1(A) := \lambda^n(T(A))$$

$$\mu_2(A) := |\det T| \cdot \lambda^n(A)$$

nach Eindeutigkeitssatz reicht es zu zeigen, dass μ_1 und μ_2 auf Quadern übereinstimmen

$\rightarrow$ reicht Quader mit rationalen Seitenlängen zu betrachten (Stetigkeit der Maße)

$\rightarrow$ reicht Quader der Form $[0,c]^n$ zu betrachten (Zerschneiden und Translationsinvarianz von λ^n)

Somit z.z.: $\underbrace{\lambda^n(T[0,c]^n)}_{\overset{?}{=}} = |\det T| \cdot \underbrace{\lambda^n([0,c]^n)}_{c^n}$

Weiterhin können wir jedes lineare T folgendermaßen "diagonalisieren":

$$TT^* = V D^2 V^*$$

$\uparrow$ orthogonal
positive Eigenwerte von TT^*
diagonal

$\Rightarrow T = VDW$ mit $W := D^{-1} V^* T$

und $WW^* = D^{-1} V^* \underbrace{TT^*}_{VD^2V^*} V D^{-1} = 1$

$\Rightarrow W$ orthogonal

(Beachte: T invertierbar $\Rightarrow$

TT^* hat keine Eigenwerte $= 0$, d.h.

D^{-1} existiert)

Da $|\det VDW| = |\det V| \cdot |\det D| \cdot |\det W|$,

reicht es, Satz zu zeigen für

(i) $T = V, W$ orthogonal

(ii) $T = D$ diagonal

(i) Sei $T = V, W$ orthogonal

dann 2.2.1 $\lambda^n(\underbrace{V[0,c]^n}_{\text{verdrehter Quader}}) = |\det V| \cdot \lambda^n([0,c]^n)$

Invarianz von λ^n unter solchen Drehungen "klar" nach Def. von λ^n

$\Rightarrow \lambda^n(V[0,c]^n) = \lambda^n([0,c]^n)$

da auch $|\det V| = 1$ für orth. V

$\Rightarrow$ Satz gilt für $T = V, W$ orthogonal

(ii) Sei

$$T = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \quad \text{diagonal}$$

$$\Rightarrow T[0,c]^n = [0,d_1 c] \times [0,d_2 c] \times \dots \times [0,d_n c]$$ (6.

$$\Rightarrow \lambda^n(T[0,c]^n) = d_1 c \cdot d_2 c \cdots d_n c$$

$$= \underbrace{d_1 \cdots d_n}_{\det T} \cdot \underbrace{c^n}_{\lambda^n([0,c]^n)}$$

$\Rightarrow$ Satz gilt für diagonales T $\square$

<u>6.10. Transformationssatz</u>: Seien $V, W \subset \mathbb{R}^n$ offen und $T: V \to W$ eine bijektive stetig differbare Abb., so dass $T'(x) = DT(x)$ invertierbar ist $\forall x \in V$. Dann ist für jede Borelmenge $A \subset V$ auch $T(A)$ Borel und es gilt

$$(*) \quad \lambda^n(T(A)) = \int_A |\det T'(x)| \, d\lambda^n(x)$$

und somit für jede integrierbare Fkt $f: W \to \mathbb{C}$ auch

$$(**) \quad \int_W f(y) \, d\lambda^n(y) = \int_V f(T(x)) \, |\det T'(x)| \cdot d\lambda^n(x)$$

$$\left[\text{d.h. } \frac{d\, T(\lambda^n)}{d\lambda^n}(x) = \frac{1}{|\det T'(x)|} \right]$$

<u>Beweis:</u> Beachte: nach Satz von Invertierbarkeit ist T^{-1} stetig diffbar und

$$(T^{-1})'(y) = \frac{1}{T'(x)} \quad \text{wobei } x = T^{-1}(y)$$

d.h. $$|\det(T^{-1})'(y)| = \frac{1}{|\det T'(x)|}$$

also insbesondere T^{-1} stetig, d.h.

$$A \in \mathcal{B}^n \Rightarrow T(A) = \underbrace{(T^{-1})^{-1}}_{\text{stetig, also messbar}}(A) \in \mathcal{B}^n$$

(**) folgt aus (*) gemäß 6.7., angewandt auf T^{-1}

Es reicht (**) mit "$\leq$" zu zeigen, da Anwendung davon auf T^{-1} gilt dann "$\geq$".

Dafür reicht es dann (*) mit "$\leq$" zu zeigen.

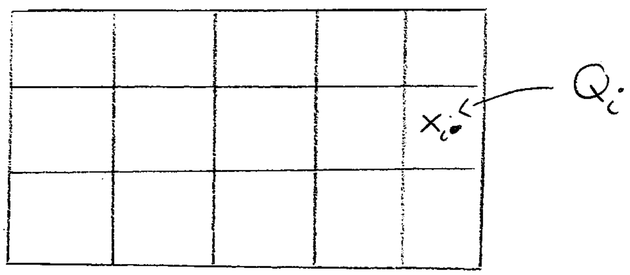
Wir müssen also zeigen:

$$\lambda^n(T(A)) \leq \int_A |\det T'(x)| \, d\lambda^n(x)$$

für alle $A \in \mathcal{B}^n$

wiederum reicht es dies für Quader zu zeigen (und zwar für solche, für die $\bar{A} \subset V$ gilt)

Sei A solch ein Quader. Zerlege dies in viele kleine Quader Q_i



Es gelte $\bar{A} \subset V$

Wähle Pkt $x_i \in Q_i$ und approximiere T auf Q_i durch affine Fkt ϕ_i gemäß

$$\phi_i(z) = T(x_i) + T'(x_i)(z - x_i)$$

Problem: globale Kontrolle dieser Approximation

dazu: $\| T'(x)^{-1} \|$ ist stetig in x, nimmt also sup auf kompakter Menge $\bar{A}$ an.

Dann gilt also $\quad \| T'(x)^{-1} \| \leq c \quad \forall x \in \bar{A}$

Sei $\varepsilon > 0$:

T stetig diff'bar $\Rightarrow$ $\|T'(x)\|$ glm stetig auf $\bar{A}$

$\Rightarrow \exists \delta$: ① $\|T'(x) - T'(y)\| \leq \dfrac{\varepsilon}{c \cdot n}$

② $|\det(T'(x)) - \det(T'(y)| \leq \varepsilon$

für x, y mit $\|x - y\| \leq \delta$

⌈beachte: T' stetig $\Rightarrow$ T' stetig in jedem Matrixeintrag und det ist Polynom in Matrixeinträgen⌋

Wähle nun die Q_i so klein, dass

$\|x-y\| \le \delta$ für $x, y \in Q_i$

Betrachte nun $z \in Q_i$ (d.h. $\|z-x_i\| \le \delta$).
Dann gilt nach MWS für Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folgende Abschätzung (mit $T = (T_1, \dots, T_n)$, $T_k: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$):

$$T(z) = \left(T_1(z), \dots, T_n(z)\right)$$

$$= \left(T_1(x_i) + T_1'(\xi_1)(z-x_i), \dots, T_n(x_i) + T_n'(\xi_n)(z-x_i)\right)$$

wobei ξ_k Pkte auf Strecke $\overline{x_i z}$

$$= T(x_i) + T'(x_i)(z-x_i) +$$

$$+ \begin{pmatrix} T_1'(\xi_1) - T_1'(x_i) \\ \vdots \\ T_n'(\xi_n) - T_n'(x_i) \end{pmatrix} (z-x_i)$$

$$= \phi_i(z) + \underbrace{\begin{pmatrix} T_1'(\xi_1) - T_1'(x_i) \\ \vdots \\ T_n'(\xi_n) - T_n'(x_i) \end{pmatrix} (z-x_i)}_{\|\cdot\| \le \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\|T_k'(\xi_k) - T_k'(x_i)\|}_{\le \frac{\varepsilon}{c \cdot n}} \cdot \|z-x_i\|}$$

$$\Rightarrow \quad \| T(z) - \phi_i(z) \| \leq n \cdot \frac{\varepsilon}{c \cdot n} \underbrace{\| z - x_i \|}_{\leq \delta} \leq \frac{\varepsilon \cdot \delta}{c}$$

Wir müssen nun auch $T(Q_i)$ durch ϕ_i kontrollieren.
Es gilt für $z \in Q_i$

$$\| \phi_i^{-1}(T(z)) - z \| = \underbrace{\| \phi_i^{-1}(T(z)) - \phi_i^{-1}(\phi_i(z)) \|}_{(T'(x_i))^{-1}(T(z) - \phi_i(z))}$$

$$\leq \underbrace{\| (T'(x_i))^{-1} \|}_{\leq c} \cdot \underbrace{\| T(z) - \phi_i(z) \|}_{\leq \frac{\varepsilon\delta}{c}}$$

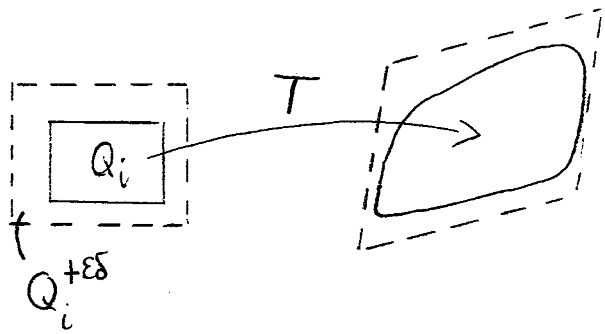
$$\leq \varepsilon\delta$$

d.h.

$$\phi_i^{-1}(T(z)) \in Q_i^{+\varepsilon\delta} := \{ y \mid \exists x \in Q_i : \| y - x \| \leq \varepsilon \cdot \delta \}$$

$$\Rightarrow \quad T(z) \in \phi_i(Q_i^{+\varepsilon\delta}) \qquad \forall z \in Q_i$$

d.h. $\quad T(Q_i) \subseteq \phi_i(Q_i^{+\varepsilon\delta})$



Somit können wir nun abschätzen:

$$\lambda^n(T(Q_i)) \overset{T(Q_i)\subseteq \phi_i(Q_i^{+\varepsilon\delta})}{\leq} \lambda^n(\phi_i(Q_i^{+\varepsilon\delta}))$$

$$\overset{\substack{6.9.\text{ mit } \phi_i \\ (\text{affin linear})}}{=} |\det(T'(x_i))| \cdot \lambda^n(Q_i^{+\varepsilon\delta})$$

$$\leq |\det(T'(x_i))| \cdot (1+\varepsilon)^n \lambda^n(Q_i)$$

$$= (1+\varepsilon)^n \int_{Q_i} \underbrace{|\det(T'(x_i))|}_{\leq |\det(T'(x))| + \varepsilon} \, d\lambda^n(x)$$

$$\leq (1+\varepsilon)^n \int_{Q_i} |\det T'(x)| \, d\lambda^n(x)$$

$$+ (1+\varepsilon)^n \cdot \varepsilon \; \lambda^n(Q_i)$$

also insgesamt:

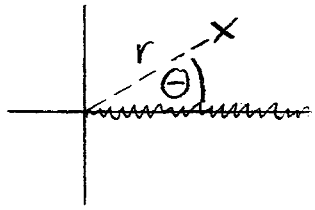
$$\lambda^n(T(A)) \leq (1+\varepsilon)^n \int_A |\det T'(x)| \, d\lambda^n(x) + (1+\varepsilon)^n \varepsilon \cdot \lambda^n(A)$$

$$\overset{\varepsilon \searrow 0}{\Longrightarrow} \quad \lambda^n(T(A)) \leq \int_A |\det T'(x)| \, d\lambda^n(x).$$

6.11. Beispiel: Polarkoordinaten in Ebene

$$V = \{(r, \Theta) \mid r > 0,\ 0 < \Theta < 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2$$

$$W = \mathbb{R}^2 \setminus \{(r, 0) \mid r \geq 0\}$$



$$T(r, \Theta) = (r\cos(\Theta),\ r\sin\Theta)$$

$$\Rightarrow \quad T'(r, \Theta) = \begin{pmatrix} \cos\Theta & -r\sin\Theta \\ \sin\Theta & r\cos\Theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \det(T'(r, \Theta)) = r\cos^2\Theta + r\sin^2\Theta = r$$

Nach Transformationsformel 6.10. folgt

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(r,0)\}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(r\cdot\cos\Theta, r\cdot\sin\Theta)\, r\, dr\, d\Theta$$

Wir benutzen hier auch Fubini, um
$d\lambda^2(x,y) = dx\,dy$
$d\lambda^2(r,\Theta) = dr\,d\Theta$
zu schreiben

$$\| $$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy$$

da $\lambda^2(\{(r,0) \mid r \geq 0\}) = 0$

Betrachte als Beispiel wieder $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$, vgl. 5.1

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \underbrace{\int_0^{\infty} r\, e^{-r^2}\, dr}_{\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}}\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\pi$$

$$= \pi$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$