7. L^p-Räume

Im Folgenden ist $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum.

7.1. Bezeichnung: 1) Für $0 < p < \infty$ definieren wir für eine messbare Fkt $f : X \to \mathbb{C}$ die L^p-Norm

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

und setzen

$$L^p(\mu) := \{ f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ messbar}, \|f\|_p < \infty \}$$

2) Für $p = \infty$ setzen wir

$$\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|$$ (wesentliche Sup "essential supremum")

$$= \inf \{ k \in \mathbb{R} \mid \mu(\{x \mid |f(x)| > k\}) = 0 \}$$
($= \infty$, falls kein solches k existiert)

und

$$L^\infty(\mu) := \{ f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ messbar und } \|f\|_\infty < \infty \}$$

<u>7.2. Bemerkungen:</u> 1) Eine Norm auf einem $\mathbb{C}$-Vektorraum V hat die Eigenschaften

(i) $\|\alpha f\| = |\alpha| \, \|f\| \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C}, f \in V$

(ii) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\| \qquad \forall f, g \in V$

(iii) $\|f\| = 0 \iff f = 0$

Die L^p-"Normen" erfüllen

(i) $$\|\alpha f\|_p^p = \int_X |\alpha f(x)|^p \, d\mu(x)$$

$$= |\alpha|^p \int_X |f(x)| \, d\mu(x)$$

$$= |\alpha|^p \, \|f\|_p^p$$

und (ii) (siehe 7.3), aber im Allgemeinen nicht (iii):

$$\|f\|_p = 0 \iff \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) = 0$$

$$\iff |f(x)|^p = 0 \quad \text{f.ü.}$$

$$\iff f(x) = 0 \quad \text{f.ü.}$$

D.h. $\|\cdot\|_p$ auf Raum der Fkten sind nur Halbnormen. Um dies zu ignorieren, identifizieren wir f und g, falls $f = g$ f.ü.

genauer: $\mathcal{L}^p = \{$ messbare Fkten mit $\|f\|_p < \infty \}$ 17

$f \sim g :\Leftrightarrow f = g$ f.ü.

$\sim$ ist Äquivalenzrelation

Sei $N := \{ f \mid f$ messbar und $f = 0$ f.ü.$\}$

N ist Untervektorraum von $\mathcal{L}^p$; nun setze

$L^p := \mathcal{L}^p / N$ Menge der Äquivalenzklassen

mit Quotientenabb.

$$\mathcal{L}^p \to L^p$$
$$f \mapsto [f]$$

Leicht zu sehen, dass Definitionen

$\alpha [f] := [\alpha f]$, $[f] + [g] := [f+g]$,

$\| [f] \|_p := \|f\|_p$

nicht von gewählten Repräsentanten abhängen.

Damit wird L^p dann zum normierten Vektorraum

Üblicherweise ignoriert man dann die

Unterscheidung zwischen $\mathcal{L}^p$ und L^p und

redet von Fkten in L^p, wobei diese auf

Nullmengen beliebig abgeändert werden dürfen

2) Def. von $\|\cdot\|_p$ für $p=\infty$ ist konsistent im folgenden Sinne: Falls

$$f \in \bigcap_{1\le p\le\infty} L^p(\mu), \text{ dann gilt}$$

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p \qquad \text{Übungsaufgabe!}$$

3) Beachte auch, dass die l_p-Räume hier als Spezialfall enthalten sind:

$X = \mathbb{N}$, $\mathfrak{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu =$ Zählmaß

(vgl. Aufgabe 4, Blatt 3)

dann gilt:

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \;\hat{=}\;$ Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = f(n)$

alle f sind messbar

$$\int f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

und

$$L^p(\mu) = \{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \} =: l_p$$

<u>7.3. Satz (Minkowski-Ungleichung)</u>: Betrachte $1 \le p \le \infty$. Falls $f, g \in L^p(\mu)$, dann ist auch $f+g \in L^p(\mu)$ und es gilt

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

<u>Beweis:</u> $p = 1$ und $p = \infty$ sind trivial

Wir betrachten nur $1 < p < \infty$; setze $\|\cdot\| := \|\cdot\|$

o.E. $\|f\| \neq 0$, $\|g\| \neq 0$ (ansonsten klar)

$$\|f+g\|^p = \int |f(x) + g(x)|^p \, d\mu(x)$$

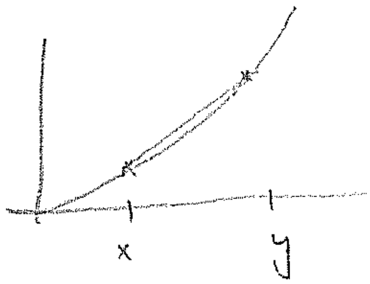
$$\le \int \underbrace{(|f(x)| + |g(x)|)^p} \, d\mu(x)$$

$$\underbrace{\left(\frac{\|f\|}{\|f\|+\|g\|} \cdot \frac{|f(x)|}{\|f\|} + \frac{\|g\|}{\|f\|+\|g\|} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|} \right)^p} \cdot (\|f\| + \|g\|)^p$$

$$\le \frac{\|f\|}{\|f\|+\|g\|} \cdot \left(\frac{|f(x)|}{\|f\|}\right)^p + \frac{\|g\|}{\|f\|+\|g\|} \cdot \left(\frac{|g(x)|}{\|g\|}\right)^p$$

wegen Konvexität von $t \mapsto t^p$

auf $[0, \infty)$ für $p \geq 1$



$f(\alpha x + \beta y) \le$

$\le \alpha f(x) + \beta f(y)$

$\forall \alpha, \beta \geq 0, \alpha + \beta = 1$

$$\le (\|f\| + \|g\|)^p \cdot \left\{ \frac{\|f\|}{\|f\|+\|g\|} \cdot \underbrace{\frac{\int |f(x)|^p \, d\mu(x)}{\|f\|^p}}_{=1} + \frac{\|g\|}{\|f\|+\|g\|} \cdot \overbrace{\frac{\int |g(x)|^p \, d\mu(x)}{\|g\|^p}} \right\}$$

$$= \left(\|f\| + \|g\|\right)^p$$

$$\Rightarrow \|f+g\| \leq \|f\| + \|g\| \qquad \square$$

<u>7.4. Bemerkung:</u> Für $0 < p < 1$ ist $t \mapsto t^p$ konkav auf $[0, \infty)$ und dann gilt:

$$\| \, |f| + |g| \, \|_p \geq \|f\|_p + \|g\|_p$$

d.h. $\|\cdot\|_p$ ist für $0 < p < 1$ keine Norm.

Man kann zeigen, dass gilt:

$$\|f+g\|^p \leq \|f\|^p + \|g\|^p \qquad \text{für } 0 < p < 1$$

Dies zeigt, dass L^p auch für $0 < p < 1$ ein Vektorraum ist und

$$d(f,g) = \|f-g\|_p^p = \int_X |f-g|^p \, d\mu$$

definiert Metrik.

<u>7.5. Def.:</u> Betrachte $p, q \geq 1$. Falls

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

so nennen wir p und q <u>konjugierte Exponenten</u>.

Wir schliessen auch den Fall $p = 1, q = \infty$ dabei ein.

7.6. Bemerkungen: 1) Beachte den Spezialfall $p = q = 2$

2) Seien p, q conjugierte Exponenten und $a, b \geq 0$. Dann gilt

$$a \cdot b \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

denn: schreibe $a = e^{s/p}$, $b = e^{t/q}$

$$\Rightarrow a \cdot b = e^{\frac{1}{p}s + \frac{1}{q}t}$$

$$\leq \frac{1}{p} e^s + \frac{1}{q} e^t \qquad \text{da } t \mapsto e^t \text{ konvex}$$

$$= \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q$$

7.7. Satz (Höldersche Ungleichung): Seien p und q konjugierte Exponenten. Sei $f \in L^p(\mu)$ und $g \in L^q(\mu)$.

Dann ist $f \cdot g \in L^1(\mu)$ und es gilt:

$$\| f \cdot g \|_1 \leq \| f \|_p \cdot \| g \|_q$$

Beweis: $p = 1$, $q = \infty$:

$$\int |f \cdot g| \, d\mu \underset{\substack{\uparrow \\ |g| \leq \|g\|_\infty \text{ f.ü.}}}{\leq} \int |f| \cdot \|g\|_\infty \, d\mu = \|g\|_\infty \underbrace{\int |f| \, d\mu}_{\|f\|_1}$$

$1 < p, q < \infty$: Sei $\| f \|_p \neq 0$, $\| g \|_p \neq 0$

(ansonsten Beh. trivial)

Setze $\hat{f}(t) := \dfrac{f(t)}{\| f \|_p}$, $\hat{g}(t) := \dfrac{g(t)}{\| g \|_q}$

$\Rightarrow \| \hat{f} \|_p = 1$, $\| \hat{g} \|_q = 1$

Beh. ist dann äquivalent zu

$$\| \hat{f} \cdot \hat{g} \|_1 \leq 1$$

Dies folgt aus:

$$\| \hat{f} \cdot \hat{g} \|_1 = \int \underbrace{|\hat{f}(t)| \cdot |\hat{g}(t)|}_{} \, d\mu(t)$$

$$\leq \frac{1}{p} |\hat{f}(t)|^p + \frac{1}{q} |\hat{g}(t)|^q$$

nach 7.6 (2)

$$\leq \frac{1}{p} \underbrace{\| \hat{f} \|_p^p}_{=1} + \frac{1}{q} \underbrace{\| \hat{g} \|_q^q}_{=1}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$= 1$$

□

7.8. Bemerkungen: 1) Der Fall $p = q = 2$

$$\int |f| \cdot |g| \, d\mu \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2$$

ist die Cauchy-Schwarz Ungleichung für den Hilbertraum $L^2(\mu)$.

3) Beachte auch die l_p-Version von Hölder:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n \cdot y_n| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{1/p} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{1/q}$$

7.9. Satz (Fischer-Riesz): Die normierten Vektorräume $L^p(\mu)$ sind für $1 \leq p \leq \infty$ vollständig, also Banachräume.

Beweis: Wir betrachten nur Fall $1 \leq p < \infty$ (der Fall $p = \infty$ ist einfacher)

Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $L^p(\mu)$

$$\Rightarrow \forall i \in \mathbb{N} \ \exists n(i) \in \mathbb{N} : \|f_n - f_m\|_p < 2^{-i} \quad \forall n, m \geq n(i)$$

o.E. $n(1) < n(2) < n(3) < \ldots$

$$\Rightarrow \|f_{n(i+1)} - f_{n(i)}\|_p < 2^{-i} \quad \forall i$$

Wir möchten Grenzwert f definieren durch

$$(*) \quad f(x) = f_{n(1)}(x) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(f_{n(i+1)}(x) - f_{n(i)}(x) \right)$$

Macht das Sinn?

Setze

$$g_k(x) := \sum_{i=1}^{k} |f_{n(i+1)}(x) - f_{n(i)}(x)|$$

$$g(x) := \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n(i+1)}(x) - f_{n(i)}(x)|$$

also $g(x) = \lim_{k \to \infty} g_k(x) \quad \forall x \in X$

$$\text{Minkowski} \Rightarrow \|g_k\|_p \leq \sum_{i=1}^{k} \underbrace{\|f_{n(i+1)} - f_{n(i)}\|_p}_{< 2^{-i}}$$

$$< 1 \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \|g\|_p^p = \int_X |g(x)|^p \, d\mu(x)$$

$$= \int_X \lim_{k \to \infty} |g_k(x)|^p \, d\mu(x)$$

$$\overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{k \to \infty} \underbrace{\int |g_k(x)|^p \, d\mu(x)}_{= \|g_k\|_p^p < 1}$$

$$\leq 1$$

$\Rightarrow g < \infty$ f. ü.

also: f definiert durch (*) f. ü.

Setze $f(x) = 0$ auf verbleibender Nullmenge

beachte:

$$f_{n(k)}(x) = \underbrace{f_{n(1)}(x) + \sum_{i=1}^{k-1} \left(f_{n(i+1)}(x) - f_{n(i)}(x) \right)}$$

$$\xrightarrow{k \to \infty} f(x) \quad \text{f. ü.}$$

also: $\lim\limits_{k \to \infty} f_{n(k)}(x) = f(x)$ f. ü.

noch z.z.: $f \in L^p(\mu)$ und

$f_n \to f$ in $L^p(\mu)$

Sei $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N(\varepsilon) : \| f_n - f_m \|_p < \varepsilon$

$\forall\, n, m \geq N(\varepsilon)$

Fixiere $m \geq N(\varepsilon)$, wähle $n = n(i)$ für hinr. großes i und beachte

$f_{n(i)} - f_m \xrightarrow{i \to \infty} f - f_m$ pktweise f. ü.

$$\Rightarrow \| f - f_m \|_p^p = \int | f(x) - f_m(x) |^p \, d\mu(x)$$

$$= \int \lim_{i \to \infty} | f_{n(i)}(x) - f_m(x) |^p \, d\mu(x)$$

$$\overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{i \to \infty} \underbrace{\int | f_{n(i)}(x) - f_m(x) |^p \, d\mu(x)}_{\| f_{n(i)} - f_m \|_p^p \;<\; \varepsilon^p}$$

für i hinr. groß

$$\leq \varepsilon^p$$

$$\Rightarrow \| f - f_m \|_p \leq \varepsilon \qquad \forall \; m \geq N(\varepsilon) \qquad (**)$$

$$\Rightarrow \| f \|_p = \| f_m + (f - f_m) \|_p$$

$$\leq \| f_m \| + \| f - f_m \|_p$$

$$< \infty$$

also $f \in L^p(\mu)$

und $\| f - f_m \|_p \to 0$ für $m \to \infty$

wegen $(**)$

Beachte, dass wir im Beweis auch Folgendes gezeigt haben. (zumindest für $1 \leq p < \infty$).

<u>7.10. Satz:</u> Sei $1 \leq p \leq \infty$ und konvergiere

$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f \quad \text{in } L^p(\mu).$$

Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n(i)})_{i \in \mathbb{N}}$, die f.ü. punktweise gegen f konvergiert.

<u>7.11. Bemerkung:</u> Ohne Übergang zu einer Teilfolge ist dies im Allgemeinen falsch. Vgl. dazu Analysis II, 13.8 (3)

<u>7.12. Korollar:</u> $L^2(\mu)$ ist, versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int f(x) \overline{g(x)} \, d\mu(x),$$

ein Hilbertraum