12. Vektoranalysis: Die klassischen Sätze von Gauß und Stokes

12.1. Motivation: Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sagt:

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a) \qquad (*)$$

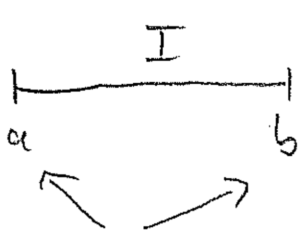
für stetig diffbares $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Frage: Gibt es höher dimensionale Analoga davon?

Antwort: ja, mit richtiger Interpretation von $(*)$!

Interpretiere $(*)$ folgendermaßen:

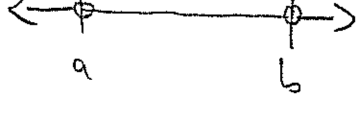
$I = [a, b]$



$\{a, b\} = \partial I$ Rand von I

dann:

$$F(b) - F(a) = \int_{\partial I} F$$



wobei Vorzeichen Orientierung vom Rand entspricht (nach "außen" gerichtet) also sagt (*):

$$\int_I F' = \int_{\partial I} F$$

$$\|$$

$$\int_I \partial F$$

also: Integral über Gebiet der Ableitung von Fkt

= Integral über Rand des Gebietes der Fkt

Dies gilt auch im Höherdimensionalen, aber ∂ muß richtig interpretiert werden!

12.2. Beispiel: Satz von Gauß

Sei $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ "Vektorfeld"

$$F = (F_1, \dots, F_n) \quad \text{mit} \quad F_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

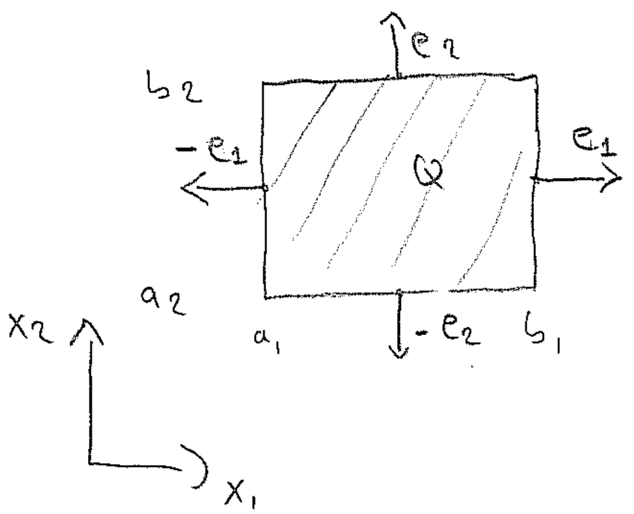
Betrachte <u>Divergenz</u> von F:

$$\operatorname{div} F := \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$$

$\operatorname{div} F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ "Skalarfeld"

Was ist $\int_M \operatorname{div} F \underbrace{dx_1 \dots dx_n}_{dV}$ über "n-dimensionale Menge $M \subset \mathbb{R}^n$"

Betrachte $n = 2$ und $M = Q$ = Quadrat



$$Q = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}$$

Dann gilt:

$$\iint_Q \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \, dx_1 \, dx_2 = \int [\underbrace{F_1(b_1, x_2)}_{= \langle F, e_1 \rangle (b_1, x_2)} \underbrace{- F_1(a_1, x_2)}_{= \langle F, -e_1 \rangle (a_1, x_2)}] \, dx_2$$

$$= \int_{\substack{\text{vertikaler} \\ \text{Rand von } Q}} \langle F, n \rangle \, dx_2$$

Normalenvektor auf Rand

$$\iint_Q \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \underbrace{dx_1 \, dx_2}_{dx_2 \, dx_1} = \int \underbrace{[F_2(x_1, b_2) - F_2(x_1, a_2)]}_{\langle F, e_2 \rangle (x_1, b_2) + \langle F, -e_2 \rangle (x_1} \, dx$$

$$= \int_{\substack{\text{horizontaler} \\ \text{Rand von } Q}} \langle F, n \rangle \, dx_1$$

also:

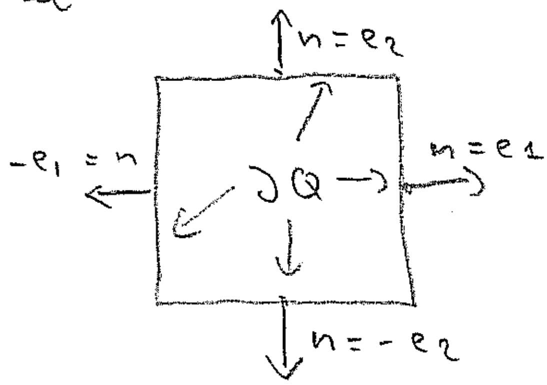
$$\iint_Q \operatorname{div} F \, dV = \int_{\partial Q} \langle F, n \rangle \, dS$$

Volumen-integral

Normale auf Rand

Oberflächenintegral

wobei



Dies gilt auch für allgemeinere M und beliebige $n \geq 1$.

<u>Satz von Gauß</u>: Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ hinreichend "schön" und $F : M \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$\int_M \operatorname{div} F \, dV = \int_{\partial M} \langle F, n \rangle \, dS$$

Volumenintegral bzgl. n-dim. Lebesgue-Maß

Normale auf ∂M

Oberflächenintegral bzgl. $(n-1)$-dim induzierten Lebesgue-Maß auf ∂M

12.3 Beispiel: Sei $F(x) = x$, d.h.

$F_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$

$$\Rightarrow \operatorname{div} F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n} = n$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_M n \cdot dV}_{n \cdot \lambda^n(M)} = \int_{\partial M} \langle x, n \rangle \, dS$$

$\Rightarrow \partial M = S^{n-1}$ Kugeloberfläche

Betrachte $M = \overline{B(0, r)}$ Kugel vom Radius r

$$\Rightarrow \langle x, n \rangle \underset{\nearrow}{=} \|x\| \cdot \|n\| = r \cdot 1$$

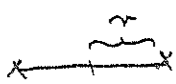
da x und n parallel

$$\Rightarrow \int_{\partial M} \langle x, n \rangle \, dS = r \cdot \lambda^{n-1}(S^{n-1})$$

$$\Rightarrow \lambda^n(\overline{B(0, r)}) = \frac{r}{n} \cdot \lambda^{n-1}(S^{n-1})$$

z.B.:

$n = 1$: $2r = \frac{r}{1} \cdot 2$



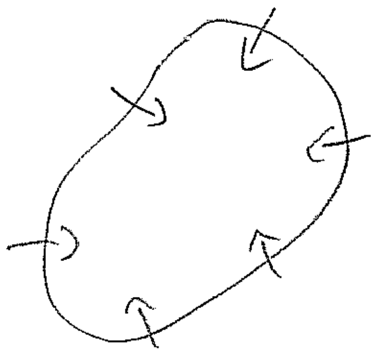
$n = 2$: $\pi r^2 = \frac{r}{2} \; 2\pi r$

$n = 3$: $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{r}{3} \; 4\pi r^2$

12.4. Physikalische Interpretation vom Satz von Gauß.

$F \mathrel{\hat{=}}$ Geschwindigkeitsfeld von inkompressibler Flüssigkeit (stationär, d.h. zeitunabhängig)

$\operatorname{div} F \mathrel{\hat{=}}$ Quellen + Senken des Feldes, d.h. Orten wo Teilchen erzeugt oder vernichtet werden

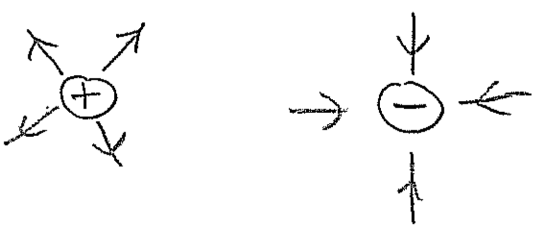


$$\underbrace{\int_M \operatorname{div} F \, dV}_{\text{Gesamtmenge von erzeugten und vernichteten Teilchen}} = \underbrace{\int_{\partial M} \langle F, n \rangle \, dS}_{\text{Fluss von } F \text{ durch Rand von } M}$$

In Elektrostatik: $F = E$ elektrisches Feld

Nach Maxwellgleichung gilt

$\operatorname{div} E = \rho$ $\quad \rho$ Ladungsdichte



also nach Gauß:

$$\underbrace{\int_M \underbrace{\operatorname{div} E}_{\rho} \, dV}_{\text{Gesamtladung}} = \underbrace{\int_{\partial M} \langle E, n \rangle \, d}_{\text{Fluß des elek Feldes aus dem}}$$

12.5. Beispiel: Satz von Stokes

Für $n = 3$ gibt es für Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad , \quad F = (F_1, F_2, F_3)$$

eine weitere wichtige Ableitungsoperation, die Rotation von F: (englisch: curl)

$$\operatorname{rot} F := \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} , \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} , \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right)$$

$\operatorname{rot} F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist also auch Vektorfeld

(dies beruht aber auf

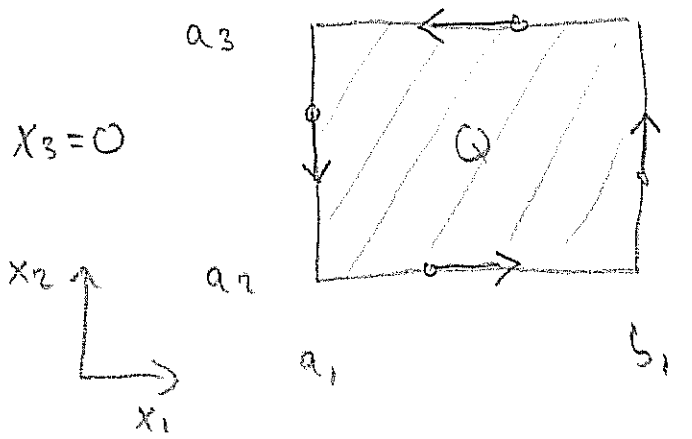
$$n = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

gilt also nur für $n = 3$)

Frage: Gibt es interessante Umformulierung von $\int_M \operatorname{rot} F \, dx = ?$

Antwort: ja, allerdings muß nun über $n - 1 = 2$ - dimensionales M integriert werden!

Betrachte wieder $M = Q =$ Quadrat, (aber nun $n = 3$) eingebettet in $x_1 - x_2 -$ Ebene



Normalenvektor $\perp$ Q, d.h. in x_3-Richtung

$$\int_Q \langle \operatorname{rot} F, dS \rangle =$$

$$= \iint (\operatorname{rot} F)_3 \, dx_1 \, dx_2$$

$$= \iint \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) dx_1 \, dx_2$$

$$= \int \big(F_2(b_1, x_2) - F_2(a_1, x_2) \big) \, dx_2$$

$$- \int \big(F_1(x_1, b_2) - F(x_1, a_2) \big) \, dx_1$$

Integrale über Rand von Q, in Tangentialrichtung vom Rand

$$= \int_{\partial Q} \langle F, \tau \rangle \, ds$$

Einheitstangenten vektor vom Rand

Dies gilt nun wieder für allgemeineres M, (aber nur für $n = 3$).

<u>(klassischer) Satz von Stokes:</u> Sei $n = 3$ und $M \subset \mathbb{R}^3$ hinreichend "schöne 2-dimensionale Fläche" und $F : V \to \mathbb{R}$, wobei V offen und $M \subset V$. Dann gilt:

$$\int_M \langle \text{rot}\, F, dS \rangle = \int_{\partial M} \langle F, \tau \rangle \, ds$$

Oberflächen-integral über Fläche

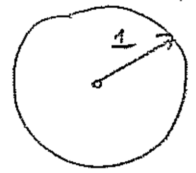
kurvenintegral über Randkurve

senkrecht zur Fläche

tangential zur Kurve

<u>12.6 Beispiele:</u> $M = \overline{B(0,1)}$ in x_1-x_2 - Ebene

$\partial M = S^1$ kreis

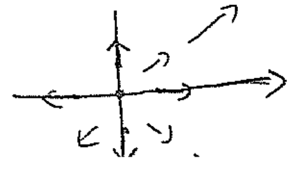


1) Sei $F(x) = x$, d.h. $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$

$\Rightarrow \text{rot}\, F = 0$

also $\int_M \langle \text{rot}\, F, dS \rangle = 0$

F



$\Rightarrow F \perp$ kreis

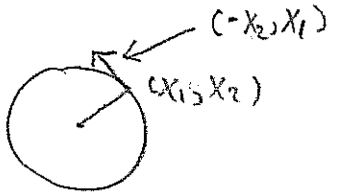
$\Rightarrow \langle F, \tau \rangle = 0$

$\Rightarrow \int \langle F, \tau \rangle \, ds = 0$

2) Sei $F(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, 2x_1x_2 + x_1, x_3)$

Tangentialvektor τ am Kreis

$(\|\tau\| = 1)$



$$\Rightarrow \langle F, \tau \rangle = \langle (x_1^2, 2x_1x_2 + x_1), (-x_2, x_1) \rangle$$

$$= -x_1^2 x_2 + 2x_1^2 x_2 + x_1^2$$

$$= x_1^2 + x_1^2 x_2$$

Integration ds über S^1 $\leadsto$ Polarkoordinaten

$x_1 = \sin\varphi$, $x_2 = \cos\varphi$

$$\Rightarrow \int_{\partial M} \langle F, \tau \rangle \, ds = \int_0^{2\pi} (\sin^2\varphi + \sin^2\varphi \cdot \cos\varphi) \, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi$$

$$= \pi$$

$$(\operatorname{rot} F)_3 = \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 2x_2 + 1 - 0$$

$$\Rightarrow \int_M \langle \operatorname{rot} F, dS \rangle = \int_{\overline{B(0,1)}} (2x_2 + 1) \, dx_1 dx_2$$

$$= \int_{\overline{B(0,1)}} 1 \, dx_1 dx_2 = \pi$$

12.7. Ausblick: Dies führt zu folgenden Fragen

a) technischer Natur

- welche Mengen, Flächen M sind in diesen Sätzen zulässig
- was ist ihr Rand ∂M
- wie können wir die Vorzeichen ("Orientierung") exakt behandeln
- wie ist Integration über M, ∂M definiert

aber auch

b) konzeptioneller Natur

- wie kann man Stokes auf $n \neq 3$ verallgemeinern
- sind Stokes und Gauß nur Spezialfälle eines allgemeinen Satzes

Antwort zu letzterem: ja!

$\rightarrow$ allgemeine Satz von Stokes

Formulierung davon benötigt allerdings Konzept von "Differentialformen"