13. Differentialformen von Grad 1 und Vektorfelder

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$f : U \to \mathbb{R}$ diffbar.

Was ist $df := Df$?

$df(x)$ ist lineare Abb. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, die f in der Nähe von x am besten approximiert, d. h.

$df(x) \in B(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$ Dualraum von $\mathbb{R}^n$

<u>13.1. Def</u>: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine <u>Differential form vom Grad 1</u> (oder <u>Pfaffsche Form</u>) ist eine Abbildung von U in den Dualraum $(\mathbb{R}^n)^*$ von $\mathbb{R}^n$.

<u>13.2. Bemerkung</u>: Seien x_i $(i = 1, .., n)$ die Koordinatenfkten auf U, d. h.

$x_i(z_1, .., z_n) = z_i$

Dann sind $dx_i = (0, .., 0, 1, 0, .., 1)$
$\uparrow$ i-te Stelle

die kanonische Basis von $(\mathbb{R}^n)^*$

denn: Sei $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j$ der j-te

kan. Basisvektor in $\mathbb{R}^n$, dann gilt:

$$dx_i(e_j) = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Somit gilt:

<u>13.3. Proposition:</u> Für jede Diff'form ω vom Grad 1 auf U existieren eindeutig bestimmte Fkten $p_1, \dots, p_n : U \to \mathbb{R}$, so dass

$$\omega(x) = p_1(x)\,dx_1 + \dots + p_n(x)\,dx_n$$

<u>13.4. Def.:</u> ω heißt messbar / stetig / diff'bar falls alle $p_1, \dots, p_n$ messbar / stetig / diff'bar sind.

<u>13.5 Def.:</u> Falls ω, ω' Diff'formen vom Grad 1 auf U, f Fkt auf U, so ist

$\omega + \omega'$ def. durch $(\omega + \omega')(x) = \omega(x) + \omega'(x)$

$f\omega$ — " — $(f\omega)(x) = f(x)\,\omega(x)$

<u>13.6. Def.:</u> Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein <u>Vektorfeld</u> auf U ist eine Abbildung $v: U \to \mathbb{R}^n$

13.7. Bem: Sei $e_1, \dots, e_n$ kan. Basis von $\mathbb{R}^n$.
Für jedes Vektorfeld v auf U existieren eindeutig bestimmte Fkten $q_1, \dots, q_n : U \to \mathbb{R}$, so dass

$$v(x) = q_1(x) e_1 + \dots + q_n(x) e_n \qquad (x \in U)$$

v heißt messbar / stetig / diffbar, falls

$q_1, \dots, q_n$ —— " ———— sind

Vektorfelder können addiert und mit Fkten multipliziert werden.

Für $\alpha \in (\mathbb{R}^n)^*$, $w \in \mathbb{R}^n$ schreiben wir

$$\langle \alpha, w \rangle := \alpha(w)$$

(vgl. auch 8.17; wir schreiben hier Vektoren im $\mathbb{R}^n$ als Spaltenvektoren, während die dazu entsprechende lin. Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ als Zeilenvektor geschrieben wird)

Falls ω Diff'form vom Grad 1, v Vektorfeld so definiert $\langle \omega, v \rangle$ eine Fkt mit Werten in $\mathbb{R}$.