14. Differentialformen höherer Ordnung

14.1. Def.: Sei E ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Eine Multilinearform vom Grad p (p-Linearform) ist eine Abbildung

$$\alpha : \underbrace{E \times \dots \times E}_{p} \to \mathbb{R},$$

die linear in jeder Variablen ist.

α heißt alternierend (oder antisymmetrisch), falls

$$\alpha(\dots, \underset{i}{v}, \dots, \underset{j}{w}, \dots) = -\alpha(\dots, \underset{i}{w}, \dots, \underset{j}{v}, \dots)$$

$$\forall\, i \neq j,\ v, w \in E$$

14.2 Bemerkung: Für jede alternierende Multilinearform α gilt: Sei π Permutation von $1, \dots, n$. Dann ist

$$\alpha(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(n)}) = \operatorname{sgn}(\pi)\, \alpha(v_1, \dots, v_n)$$

wobei

$$\operatorname{sgn}(\pi) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \pi \text{ Produkt gerader Anzahl von Transposit.} \\ -1 & \text{— " — ungerader — " —} \end{cases}$$

<u>14.3 Satz</u>: Sei α beliebige p-Linearform auf E. Setze

$$\beta(v_1,..,v_p) = \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \alpha(v_{\sigma(1)},..,v_{\sigma(p)})$$

wobei S_p = Permutationsgruppe von $\{1,..,p\}$.

Dann gilt:

1) β ist alternierend

2) Falls α schon alternierend war, so ist

$\beta = p!\,\alpha$

<u>Beweis</u>: 1) Sei $\pi \in S_p$; beachte: $\operatorname{sgn}(\pi\sigma) = \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma)$

Dann gilt:

$$\beta(v_{\pi(1)},..,v_{\pi(p)}) = \sum_{\sigma \in S_p} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \alpha(v_{\pi\sigma(1)},..,v_{\pi\sigma(p)})$$

$$= \operatorname{sgn}(\pi) \underbrace{\sum_{\sigma \in S_p}}_{\sum_{\pi\sigma \in S_p}} \operatorname{sgn}(\pi\sigma) \cdot \alpha(v_{\pi\sigma(1)},..,v_{\pi\sigma(p)})$$

$$= \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \beta(v_1,..,v_p)$$

2) klar, da $\# S_p = p!$ $\square$

<u>14.4. Def.</u>: 1) Sei α p-Linearform, β q-Linearform auf E. Wir definieren die $(p+q)$-Linearform $\alpha \otimes \beta$ durch

$$\alpha \otimes \beta (v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_q) := \alpha(v_1, \dots, v_p) \cdot \beta(w_1, \dots, w_q)$$

2) Sind α und β alternierend, so definieren wir ihr <u>äußeres Produkt</u> $\alpha \wedge \beta$ durch

$$\alpha \wedge \beta (v_1, \dots, v_{p+q}) := \frac{1}{p!\, q!} \sum_{\pi \in S_{p+q}} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \alpha(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p)}) \cdot \beta(v_{\pi(p+1)}, \dots, v_{\pi(p+q)})$$

<u>14.5. Beispiel</u>: Seien

$e_1^* = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2^* = (0, 1, 0, \dots, 0)$ $\in (\mathbb{R}^n)^*$

1-Linearformen

Dann gilt

$$e_1^* \wedge e_2^* = e_1^* \otimes e_2^* - e_2^* \otimes e_1^*$$

<u>14.6 Satz:</u> 1) $\alpha \wedge \beta$ ist alternierend

2) Es gilt:

(a) $(\alpha + \alpha') \wedge \beta = \alpha \wedge \beta + \alpha' \wedge \beta$

$$\alpha \wedge (\beta + \beta') = \alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \beta'$$

(b) $\wedge$ ist associativ, d. h.

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

(c) Ist α p-Form, β q-Form, so gilt

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{p \cdot q} \alpha \wedge \beta$$

<u>Beweis:</u> 1) klar nach 14.3 (1)

2)(a) klar, wegen Bilinearität der Formel in 14.4.

(b) Sei $\left.\begin{array}{ll} \alpha & p\text{-Form} \\ \beta & q\text{-Form} \\ \gamma & r\text{-Form} \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \wedge \beta \quad p+q\text{-Form}$

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma (v_1, \dots, v_{p+q+r}) =$$

$$= \frac{1}{(p+q)!\, r!} \sum_{\pi \in S_{p+q+r}} (\alpha \wedge \beta)(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p+q)}) \cdot \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \gamma(v_{\pi(p+q+1)}, \dots, v_{\pi(p+q+r)})$$

$$= \frac{1}{(p+q)!\, r!} \sum_{\pi \in S_{p+q+r}} \operatorname{sgn}(\pi)\, \gamma(v_{\pi(p+q+1)}, \ldots, v_{\pi(p+q+r)})$$

$$\cdot \frac{1}{p!\, q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \alpha(v_{\pi\sigma(1)}, \ldots, v_{\pi\sigma(p)}) \cdot$$

$$\cdot \beta(v_{\pi\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\pi\sigma(p+q)})$$

Setze $\tau(i) = \begin{cases} \pi\sigma(i) & i \leq p+q \\ \pi(i) & i > p+q \end{cases}$.

$\Rightarrow \operatorname{sgn}(\tau) = \operatorname{sgn}(\pi) \cdot \operatorname{sgn}(\sigma)$

$$\sum_{\substack{\pi \in S_{p+q+r} \\ \sigma \in S_{p+q}}} = (p+q)! \sum_{\tau \in S_{p+q+r}}$$

$$= \frac{1}{p!\, q!\, r!} \sum_{\tau \in S_{p+q+r}} \alpha(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(p)}) \cdot \beta(v_{\tau(p+1)}, \ldots, v_{\tau(p+q)})$$

$$\cdot \gamma(v_{\tau(p+q+1)}, \ldots, v_{\tau(p+q+r)})$$

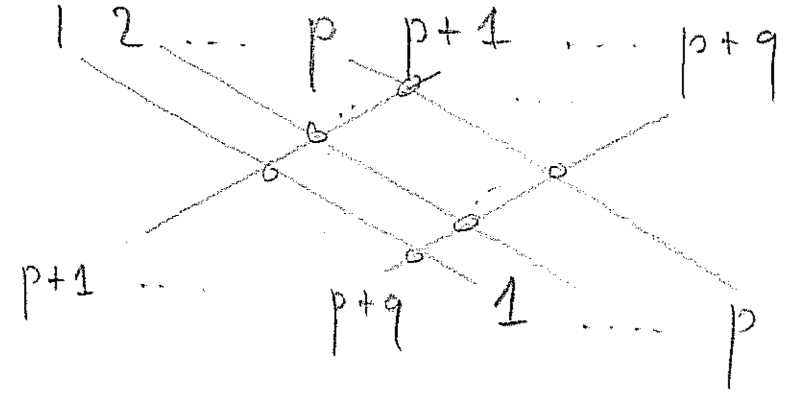
$$\cdot \operatorname{sgn}(\tau)$$

$$\overset{\text{analoge Rechnung}}{=} \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)(v_1, \ldots, v_{p+q+r})$$

(c) $\beta \wedge \alpha (v_1, \dots, v_{q+p}) = \alpha \wedge \beta (v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p+q)})$

mit $\pi = \begin{pmatrix} 1 & \dots & p & p+1 & \dots & p+q \\ q+1 & \dots & q+p & 1 & \dots & q \end{pmatrix}$

$= \underbrace{\operatorname{sgn}(\pi)}_{(-1)^{p\cdot q}} \alpha \wedge \beta (v_1, \dots, v_{q+p})$



$p \cdot q$ Vertauschungen

$\square$

<u>14.7. Bem</u>: Wie im Beweis von 14.6 (b) zeigt man: Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ alternierende Multilinearformen, wobei α_i vom Grad p_i ist, dann gilt:

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k (v_1, \dots, v_p) = \frac{1}{p_1! \, p_2! \dots p_k!} \sum_{\pi \in S_p}$$

$$\alpha_1(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(p_1)}) \, \alpha_2 (v_{\pi(p_1+1)}, \dots, v_{\pi(p_1+p_2)}) \dots$$

$$\dots \alpha_k (v_{\pi(p_1+\dots+p_{k-1}+1)}, \dots, v_{\pi(p)})$$

wobei $p = p_1 + \dots + p_k$

<u>14.8. Satz:</u> 1) Sei E ein n-dimensionaler reeller Vektorraum. Dann ist der Raum der alternierenden p-Linearformen über E ein Vektorraum der Dimension $\binom{n}{p}$.

2) Sei $e_1, \dots, e_n$ eine Basis von E und
$e_1^*, \dots, e_n^*$ die duale Basis von E^*, d.h.
e_j^* ist gegeben durch

$$e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$$

Dann bildet $\{e_{i_1}^* \wedge e_{i_2}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^* \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n\}$ eine Basis für die alternierenden p-Linearformen über E.

<u>Beweis:</u> Beachte

$$e_{i_1}^* \wedge \dots e_{i_p}^* (e_{j_1}, \dots, e_{j_p}) = \begin{cases} 1 & i_k = j_k \ \forall k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

d.h. die $e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_p}^*$ $(1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n)$ sind linear unabhängig.

Sei nun α alternierende p-Linearform. Dann ist α eindeutig bestimmt durch die Werte

(*) $\alpha(e_{i_1}, \dots, e_{i_p})$.

Beachte nun: falls $i_k = i_\ell = i$, so ist

$$\alpha(\ldots, \underset{k}{e_i}, \ldots, \underset{\ell}{e_i}, \ldots) = -\alpha(\ldots, \underset{k}{e_i}, \ldots, \underset{\ell}{e_i}, \ldots)$$

$$\Rightarrow \alpha(\ldots, e_i, \ldots, e_i, \ldots) = 0$$

Also brauchen wir nur die Werte von (*) mit paarweise disjunkten Indizes.

Durch Vertauschen von Argumenten kann solch ein Wert aber auf den Fall reduziert werden, wo $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$, d.h. α ist eindeutig bestimmt durch Werte (*) mit $i_1 < i_2 < \ldots < i$. Dann gilt aber

$$\alpha = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_p \le n} \alpha(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p})\, e_{i_1}^* \wedge \ldots \wedge e_{i_p}^*$$

$\square$

<u>14.9. Def.</u>: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine <u>Differentialform vom Grad p</u> auf U ist eine Abbildung

$$\omega : U \to \{\text{alternierende } p\text{-Linearformen auf } \mathbb{R}^n\}$$

<u>14.10. Bem.</u>: Diff'formen vom Grad p können addiert und mit reellen Fkten multipliziert werden (pktweise vgl. 13.5. für $p = 1$

14.11. Def.: Seien ω_1, ω_2 Diff'formen vom Grad p_1 bzw p_2. Das äußere Produkt $\omega_1 \wedge \omega_2$ (oder $\omega_1\omega_2$) ist definiert durch

$$\omega_1 \wedge \omega_2 (x) := \omega_1(x) \wedge \omega_2(x)$$

14.12. Bem: 1) $\omega_1 \wedge \omega_2$ ist p_1+p_2-Diff'form

2) Es gilt:

- $(\omega_1 + \omega_1')\omega_2 = \omega_1\omega_2 + \omega_1'\omega_2$

  $\omega_1(\omega_2 + \omega_2') = \omega_1\omega_2 + \omega_1\omega_2'$

- $(f\omega_1)\omega_2 = \omega_1(f\omega_2) = f(\omega_1\omega_2)$

  für f Fkt

- $(\omega_1\omega_2)\omega_3 = \omega_1(\omega_2\omega_3)$

- $\omega_2\omega_1 = (-1)^{p_1p_2}\,\omega_1\omega_2$

  (ω_1 p_1-Form, ω_2 p_2-Form)

14.13. Notation: Gemäß 13.2. schreiben wir für die kanonische duale Basis $e_1^*, .., e_n^*$ von $\mathbb{R}^n$ auch $dx_1, .., dx_n$, und somit für die Basis der alternierenden p-Linearformen aus 14.8. auch

$e_{i_1}^* \wedge .. \wedge e_{i_p}^* = dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$

Somit gilt

14.4. Proposition und Def.: Jede Diff'form ω vom Grad p auf U besitzt eine eindeutig bestimmte Darstellung der Form

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_p \le n} g_{i_1, \dots, i_p} \, dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$$

wobei $g_{i_1, \dots, i_p} : U \to \mathbb{R}$

ω heißt messbar, stetig, diff'bar, usw wenn alle $g_{i_1, \dots, i_p}$ die entsprechende Eigenschaft besitzen.

14.5. Beispiel: $n = 3$, $U = \mathbb{R}^3$

Wir schreiben
$$dx = dx_1 = e_1^*$$
$$dy = dx_2 = e_2^*$$
$$dz = dx_3 = e_3^*$$

Sei

$$\omega_1(x,y,z) = x^2 \, dy \, dz + \cos z \, dx \, dz \qquad (2\text{-Form})$$

$$\omega_2(x,y,z) = x \, dx + z \, dy + y \, dz \qquad (1\text{-Form})$$

$$\Rightarrow \omega_1 \omega_2 (x,y,z) = x^3 \underbrace{dy \, dz \, dx}_{dx \, dy \, dz} + \cos z \cdot x \underbrace{dx \, dz \, dx}_{0}$$
$$+ x^2 z \underbrace{dy \, dz \, dy}_{0} + \cos z \cdot z \underbrace{dx \, dz \, dy}_{-dx \, dy \, dz}$$
$$+ 0 + 0$$

$$= (x^3 - z \cdot \cos z)\, dx\, dy\, dz$$

14.6. Bem: 1) Wegen $\omega \cdot \omega = (-1)^{p \cdot p}\, \omega \cdot \omega$

für p-Form ω, gilt:

$\omega \wedge \omega = 0$ falls p ungerade

2) Beachte auch: Einzige p-Form für $p > n$

ist 0, d.h.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ p_1\text{-Form}}}{\omega_1} \wedge \underset{\substack{\uparrow \\ p_2\text{-Form}}}{\omega_2} = 0 \quad \text{falls } p_1 + p_2 > n$$