15. Äußere Ableitung von Diff'formen

15.1. Motivation: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen

Eine 0-Form auf U ist eine Fkt

$$f : U \to \mathbb{R}$$

(eine 0-Linearform ω auf E ist lineares

$$\omega : \underbrace{E^0}_{\cong \mathbb{R}} \to \mathbb{R},$$

d.h. 0-Form $\hat{=}$ reeller Zahl)

Falls f diff'bar, so ist

$$df = Df : U \to (\mathbb{R}^n)^*$$

eine 1-Form mit Koordinatendarstellung

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Wir haben also Ableitungsoperator

$$d : \{0\text{-Formen}\} \to \{1\text{-Formen}\}$$

Diesen dehnen wir auf beliebiges p

aus.

15.2. Def.: Sei

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} g_{i_1, \dots, i_p} \, dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$$

eine diff'bare Diff'form vom Grad p auf U.

Die äußere Ableitung $d\omega$ von ω ist dann gegeben durch

$$d\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} d(g_{i_1, \dots, i_p}) \, dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$$

15.3. Beispiele: 1) $n = 2$

$\omega = f\,dx + g\,dy$ für Fkten $f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\Rightarrow d\omega = df\,dx + dg\,dy$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy\right) dy$$

$$= 0 + \frac{\partial f}{\partial y} \underbrace{dy\,dx}_{-dx\,dy} + \frac{\partial g}{\partial x} dx\,dy + 0$$

$$= \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy$$

2) $n = 3$

$$\omega(x, y, z) = x^2\,dx + y\,dz$$

$$\Rightarrow d\omega = \underbrace{d(x^2)}_{2x\,dx + 0\,dy + 0\,dz} dx + dy\, dz$$

$$= 0 + dy\, dz$$

$$= dy\, dz$$

15.4. Bemerkungen: 1) Es gilt

$$\{\text{Diff'formen vom Grad } p\} \xrightarrow{d} \{\text{Diff'formen vom Grad } p+1\}$$

2) Offensichtlich ist d linear, d.h.

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$$

15.5. Satz: Seien ω_1, ω_2 diff'bare Diff'formen vom Grad p bzw. q. Dann gilt:

$$d(\omega_1 \omega_2) = d(\omega_1)\omega_2 + (-1)^p \cdot \omega_1 \cdot d(\omega_2)$$

Beweis: Wegen Linearität von d reicht es Beh. für ω_1, ω_2 von der Form

$$\omega_1 = f\, dx_{i_1} \dots dx_{i_p}, \quad \omega_2 = g\, dx_{j_1} \dots dx_{j_q}$$

zu zeigen.

Es gilt ($\leadsto$ Analysis II, Übungsblatt 8, Auf. 2)

$$d(f \cdot g) = (df) g + f\, dg$$

also:

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d(f\, dx_{i_1} \dots dx_{i_p}\, g \cdot dx_{j_1} \dots dx_{j_q})$$

$$= d(fg)\, dx_{i_1} \dots dx_{i_p}\, dx_{j_1} \dots dx_{j_q}$$

$$= (df) \cdot g \cdot dx_{i_1} \dots dx_{i_p} \cdot dx_{j_1} \dots dx_{j_q}$$

$$+ f \underbrace{dg\, dx_{i_1} \dots dx_{i_p}}_{= (-1)^p \underbrace{dx_{i_1} \dots dx_{i_p}}_{p\text{-Form}} \underbrace{dg}_{1\text{-Form}}} \cdot dx_{j_1} \dots dx_{j_q}$$

$$= d\omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge d\omega_2 \cdot (-1)^p \qquad \square$$

<u>15.6. Satz</u>: Sei ω zweimal stetig diff'bare Diff'form vom Grad p. Dann ist

$$d(d\omega) = 0$$

<u>Beweis</u>: reicht $\omega = f\, dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$ zu betrachten

$$\Rightarrow d\omega = df\, dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$$

$$\Rightarrow d(d\omega) = d(df) \wedge dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$$

$$+ (-1)^1 f \wedge \underbrace{d(dx_{i_1} \dots dx_{i_p})}_{=0 \quad \text{da } d1 = 0}$$

$$= d(df) \wedge dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$$

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i$$

$$\Rightarrow d(df) = \sum_i \underbrace{d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)}_{\sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j} dx_i$$

$$= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_j\, dx_i$$

$$= \sum_{i>j} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right)}_{=0} dx_j\, dx_i$$

(vgl. Ana II, 7.15)

also: $d(d\omega) = 0$