16. Stammfkten von Diff'formen

16.1. Def: Sei ω stetige Diff'form vom Grad p auf U ($U \subset \mathbb{R}^n$ offen)

1) Eine Diff'form α vom Grad $p-1$ auf U heißt <u>Primitive</u> (oder <u>Stammfkt</u>) zu ω, falls gilt:

$$\omega = d\alpha$$

ω heißt <u>exakt</u>, falls es eine Stammfkt besitzt.

2) ω heißt <u>geschlossen</u>, falls $d\omega = 0$

16.2. Bem.: 1) Wegen $d(d\alpha) = 0$ folgt:

ω exakt $\Rightarrow$ ω geschlossen

Bsp: $\omega = dx + x\,dy$ ist nicht geschlossen,

$d\omega = dx\,dy \neq 0$,

also auch nicht exakt

2) Frage: Gilt auch die Umkehrung, d.h. ist geschlossene Form exakt.

Antwort: nicht im Allgemeinen; stimmt aber wenn Gebiet U "schön genug" ist

16.3. Beispiel: Betrachte auf

$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

die Diff'form vom Grad 1

$$\omega(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\,dy - \frac{y}{x^2+y^2}\,dx$$

Dann gilt:

i) ω ist geschlossen, d.h. $d\omega = 0$

ii) ω ist nicht exakt

zu i): nachrechnen!

zu ii): Annahme: $\omega = df$

für $f : U \to \mathbb{R}$, d.h.

$$\omega = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy \quad , \text{ also}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

Betrachte nun $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei

$g(t) := f(\cos t, \sin t)$

$\Rightarrow$ g stetig und periodisch auf $\mathbb{R}$, d.h.

nimmt in einem $t_0 \in \mathbb{R}$ ihr Maximum an

$\Rightarrow g'(t_0) = 0$

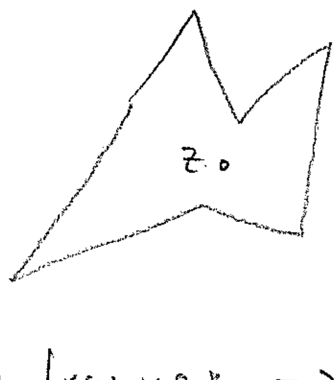
aber: $g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$

$$= -\frac{\sin t}{\sin^2 t + \cos^2 t} \cdot (-\sin t) + \frac{\cos t}{\sin^2 t + \cos^2 t} \cdot \cos t$$

$$= 1 \qquad \forall t$$

Wdsp, d.h. es gibt kein f mit $\omega = df$

<u>16.4. Def.</u>: U heißt <u>sternförmig</u>, falls es einen Pkt z in U gibt, so dass für jedes $x \in U$ die ganze Verbindungsstrecke zwischen z und x in U liegt.



beachte: konvex $\Rightarrow$ sternförmig $\Rightarrow$ zusammenhängend

16.5. Lemma von Poincaré: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig. Dann ist jede geschlossene Differentialform (beliebigen Grades $p \geq 1$) exakt, d.h.

$$d\omega = 0 \implies \exists \alpha : \omega = d\alpha$$

Beweis: $p = 1$ (siehe auch Ana II, 11.4)

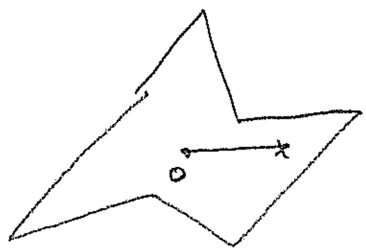
Sei $\omega = \sum g_i \, dx_i$

o.E. sei der spezielle Pkt für sternförmiges U gegeben durch $z = 0$

Idee: betrachte $\hat{\omega}(t, x) := \omega(tx)$

und integriere dies entlang der Verbindung von $z = 0$ zu x

$$\underbrace{\alpha = \int_0^1 \omega(tx)}$$



was bedeutet dies?

→ entwickle formal in Differentialen und berücksichtige nur Terme, die dt enthalten

$$\omega(tx) = \sum g_i(tx) \underbrace{d(tx_i)}_{dt \cdot x_i + t\, dx_i}$$

↑ nur diese Te

also setze

$$\alpha(x) := \int_0^1 \Big(\sum_i g_i(tx) \cdot x_i \Big) \, dt$$

dies ist 0-Form

Rechne nach (unter Benutzung von $d\omega = 0$), dass dies eine Stammfkt ist:

$$d\alpha(x) = \int_0^1 \Big(\sum_i \underbrace{d\big(g_i(tx) \cdot x_i\big)}_{\sum_j \underbrace{\frac{\partial g_i(tx)}{\partial x_j}}_{= \frac{\partial g_j(tx)}{\partial x_i}} \cdot x_i \cdot dx_j + g_i(tx) d} \Big) \, dt \quad (\text{da } d\omega = 0)$$

$$= \int_0^1 \Big(\sum_j \underbrace{\Big(\sum_i \frac{\partial g_j(tx)}{\partial x_i} \cdot x_i \, dx_j + g_j(tx) \, dx_j \Big)}_{\frac{d}{dt}\left(g_j(tx) \cdot t\right) \, dx_j} \, d$$

$$= \sum_j \underbrace{\Big[g_j(tx) \cdot t \Big]_{t=0}^{t=1}}_{g_j(x) - 0} \, dx_j$$

$$= \omega(x)$$

allgemeines p: $\omega(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_p} g_{i_1,\dots,i_p} \, dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$

formale Idee wie oben: setze

$$\alpha = \int_0^1 \omega(tx)$$

wobei nur Terme mit dt berücksichtigt werden

$$\omega(tx) = \sum g_{i_1,\dots,i_p}(tx) \underbrace{d(tx_{i_1})}_{dt \cdot x_{i_1} + t \cdot dx_{i_1}} \dots \underbrace{d(tx_{i_p})}_{\dots}$$

$$= dt \wedge \Big\{ \sum_{\substack{i_1,\dots,i_p \\ k}} g_{i_1,\dots,i_p}(tx) \cdot t^{p-1} \, dx_{i_1} \dots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{fehlt}}}{\check{dx}_{i_k}} \dots dx_{i_p} \cdot x_{i_k} \cdot (-1)^{k-1} \Big\}$$

$+$ Terme ohne dt

also setze konkret

$$\alpha(x) := \sum_{i_1 < \dots < i_p} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} x_{i_k} \int_0^1 g_{i_1,\dots,i_p}(tx) \cdot t^{p-1} \, dt \; dx_{i_1} \dots \check{dx}_{i_k} \dots dx_{i_p}$$

dann rechne analog zu $p = 1$ (aber viel aufwendiger) unter Benutzung von $d\omega = 0$ nach, dass

$d\alpha = \omega$ $\square$