17. Transformation von Diff'formen unter diff'baren Abbildungen

17.1. Def.: Sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $V \subset \mathbb{R}^n$ offen

$\varphi : U \to V$ stetig diff'bar

Sei ω eine p-Form auf V $(0 \leq p \leq n)$.

Wir definieren die mit φ zurückgeholte p-Form $\varphi^*\omega$ auf U durch:

$p = 0$: (0-Form $\hat{=}$ Fkt auf V) $\omega = f$

$$\varphi^*\omega := f \circ \varphi$$

$p > 1$:
$$\varphi^*\omega(x)(\underbrace{v_1, \dots, v_p}_{\in \mathbb{R}^m}) := \omega(\varphi(x))(\varphi'(x)\cdot v_1, \dots, \underbrace{\underset{\in B(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)}{\varphi'(x)} \cdot \underset{\in \mathbb{R}^m}{v_p}}_{\in \mathbb{R}^n})$$

also:

$$\{p\text{-Formen auf } V\} \xrightarrow{\varphi^*} \{p\text{-Formen auf } U\}$$

"Zurückholen nach U"

(oder Zurückziehen)

17.2. Prop.: φ^* hat folgende Eigenschaften:

(1) $\varphi^*(\omega_1 + \omega_2) = \varphi^*\omega_1 + \varphi^*\omega_2$

(2) $\varphi^*(\omega_1 \omega_2) = \varphi^*\omega_1 \wedge \varphi^*\omega_2$

(3) Falls $\omega = df$ (d.h. $p = 1$, $f : V \to \mathbb{R}$), so ist

$$\varphi^*\omega = d(f \circ \varphi)$$

(4) Falls $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_p} g_{i_1, \dots, i_p} \, dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$

so ist

$$\varphi^*(\omega) = \sum (g_{i_1, \dots, i_p} \circ \varphi) \, d(x_{i_1} \circ \varphi) \dots d(x_{i_p} \circ \varphi)$$

[wobei $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die i-te Koordinatenfkt.]

Beweis: (1) klar

(2) $\varphi^*(\omega_1 \omega_2)(x)(v_1, \dots, v_{p+q}) =$

$$= \omega_1\omega_2(\varphi(x))(\varphi'(x) v_1, \dots, \varphi'(x) v_{p+q})$$

$$= \frac{1}{p!q!} \sum_{\pi \in S_{p+q}} \omega_1(\varphi(x))(\varphi'(x) v_{\pi(1)}, \dots, \varphi'(x) v_{\pi(p)}) \cdot$$

$$\cdot \, \omega_2(\varphi(x))(\varphi'(x) v_{\pi(p+1)}, \dots, \varphi'(x) v_{\pi(p+q)})$$

$$= \varphi^*\omega_1 \wedge \varphi^*\omega_2 \, (v_1, \dots, v_{p+q})$$

(3) $\omega = df = Df$, also

$$d(f \circ \varphi)(x) = df(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = \varphi^*(\underbrace{df}_{\omega})(x)$$

genauer: $f : \underset{\cap \mathbb{R}^n}{V} \to \mathbb{R}$, $\varphi : \underset{\cap \mathbb{R}^m}{U} \to \mathbb{R}^n$

$f \circ \varphi : \underset{\cap \mathbb{R}^m}{U} \to \mathbb{R}$

$\omega(x) = df(x) \mathrel{\hat{=}} \operatorname{grad} f(x)$ $\quad 1 \times n$ - Matrix

heißt für $w = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\omega(x)(w) = \operatorname{grad} f(x) \cdot w = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \xi_i$$

Nun gilt

$$d(f \circ \varphi)(x) = \operatorname{grad}(f \circ \varphi)(x)$$

$$= \underbrace{\operatorname{grad} f(\varphi(x))}_{1 \times n} \cdot \underbrace{\varphi'(x)}_{n \times m} \qquad 1 \times m\text{ - Matrix}$$

also für $v \in \mathbb{R}^m$

$$d(f \circ \varphi)(x)(v) = \operatorname{grad} f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) \cdot v$$

$$= \omega(\varphi(x))(\varphi'(x) \cdot v)$$

$$= \varphi^*(\omega)(x)$$

(4) folgt aus (1), (2), (3): nach (1) reicht es, zu betrachten

$$\varphi^*(g_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}) \overset{(2)}{=} \underbrace{\varphi^*(g_{i_1 \dots i_p})}_{= g_{i_1 \dots i_p} \circ \varphi} \underbrace{\varphi^*(dx_{i_1})}_{\overset{(3)}{=} d(x_{i_1} \circ \varphi)} \dots d(x_{i_p})$$

$\square$

17.3. Beispiel: Betrachte 2-Form im $\mathbb{R}^3$

$$\omega(x,y,z) = x\, dy \wedge dz + y\, dz \wedge dx + z\, dx \wedge dy$$

Hole diese zurück nach $\mathbb{R}^2$ mit der Abb.

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$$\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos u \cdot \cos v \\ \sin u \cdot \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}$$

[entspricht Parametrisierung der Kugeloberfläche S^2 durch sphärische Koordinaten (u,v)]

$$\Rightarrow \quad dx = -\sin u \cdot \cos v\, du - \cos u \sin v\, dv$$

$$dy = \cos u \cdot \cos v\, du - \sin u \sin v\, dv$$

$$dz = \cos v\, dv$$

$$\Rightarrow \varphi^* \omega(u,v) = \cos u \cdot \cos v \left(\cos u \cdot \cos v\, du \cdot \cos v\, dv \right.$$

$$+ \sin u \cdot \cos v \left(-\cos v\, dv \sin u \cdot \cos v\, du \right)$$

$$+ \sin v \left(\sin^2 u \cos v \sin v\, du\, dv \right.$$

$$\left. - \cos^2 u \cos v \sin v\, dv\, du \right.$$

$$= du \wedge dv \left(\cos^2 u \cos^2 v \cdot \cos v + \sin^2 u \cos^2 v \cdot \cos v \right.$$

$$+ \sin^2 u \sin^2 v \cos v + \cos^2 u \sin^2 v \cos v$$

$$= \cos v\, du\, dv$$

17.4. Satz: Falls ω stetig diffbar und φ zweimal stetig diffbar ist, so ist $\varphi^*\omega$ stetig diffbar und es gilt

$$\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*(\omega))$$

Beweis: Sei $\omega = \sum g_{i_1,\dots,i_p}\, dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$

$$\Rightarrow d\omega = \sum dg_{i_1,\dots,i_p}\, dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$$

$$\Rightarrow \varphi^*(d\omega) = \varphi^*\left(\sum dg_{i_1,\dots,i_p}\, dx_{i_1} \dots d_{i_p}\right)$$

$$= \sum d(g_{i_1,\dots,i_p} \circ \varphi)\, d(x_{i_1} \circ \varphi) \dots d(x_{i_p} \circ \varphi)$$

$$= d\left(\sum g_{i_1,\dots,i_p} \circ \varphi \cdot d(x_{i_1} \circ \varphi) \dots d(x_{i_p} \circ \varphi)\right)$$

$$= d(\varphi^*\omega)$$

$\square$