# 18. Flächeninhalt von parametrisierten Flächen

**18.1. Def.:** Sei $I \subset \mathbb{R}^k$. Eine Abbildung

$$\varphi : I \to \mathbb{R}^n$$

heißt *diffbar* (stetig diffbar, usw.), falls $\varphi$ zu einer diffbaren (stetig diffbaren, usw) Abbildung $\bar{\varphi} : U \to \mathbb{R}^n$ fortgesetzt werden kann, wobei $I \subset U$, $U \subset \mathbb{R}^k$ offen

**18.2. Def.:** Sei $0 < k \leq n$. Eine *k-dimensionale parametrisierte Fläche in $\mathbb{R}^n$* ist eine stetig diffbare Abb. $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$,
wobei $I \subset \mathbb{R}^k$ messbar

Notation: $(I, \varphi)$

**18.3. Beispiele:** 1) Stetig diffbare Kurven

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

sind 1-dim. parametrisierte Flächen

2) $\varphi : [0, \pi] \times [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^3$ $\quad r > 0$

$$(s,t) \mapsto (r \cdot \sin s \cdot \cos t, r \sin s \cdot \sin t, r \cdot \cos s)$$

ist 2-dim. parametrisierte Fläche in $\mathbb{R}^3$
(und zwar die Kugeloberfläche $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = r\}$)
(vgl. 12.3)

<u>18.4. Motivation:</u> Was ist Volumen von $(I, \varphi)$?

1) Für $k = 1$, $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ hatten wir

(vgl. Ana II, 6.9) für die Länge die Formel

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

2) Für bijektive $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist das Volumen

des Bildes gegeben durch Transf. satz. 6.10:

$$\lambda^n(T(A)) = \int_A \underbrace{|\det T'(x)|}_{= \sqrt{\det(T'(x)^* T'(x))}} \, d\lambda^n(x)$$

3) Auch für $k < n$ ist $\sqrt{\det(T^* T)}$ für

lineares $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ das Volumen von

$T([0,1]^k) \subset \mathbb{R}^n$

4) Approximation von $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ durch kleine

k-dim. Würfel in $I$ motiviert folgende Def.

<u>18.5. Def.:</u> Der <u>Flächeninhalt</u> (oder das <u>Volumen</u>)

der parametrisierten Fläche $(I, \varphi)$ ist def. als

$$\mathrm{Vol}(I, \varphi) = \int_I \sqrt{\det(\varphi'(x)^* \varphi'(x))} \, \underset{d\lambda^k(x)}{\underset{\uparrow}{dx}}$$

**18.6. Bemerkung:** Beachte, dass im Allgemeinen

$$\mathrm{Vol}(I, \varphi) \neq \mathrm{Vol}(\varphi(I))$$

da: falls $\varphi$ nicht injektiv, so können Teile vom Bild $\varphi$ öfters durchlaufen werden

z.B.: $\varphi : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

$\Rightarrow$ Kreis wird zweimal durchlaufen und

$$\mathrm{Vol}([0, 4\pi], \varphi) = \int_0^{4\pi} \underbrace{\|\dot{\varphi}(t)\|}_{1} \, dt = 4\pi$$

**18.7. Satz:** Die Def. des Flächeninhaltes in 18.5. ist invariant unter Parameterwechsel:

Seien $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}^k$ messbar

$I_1 \subset U_1$, $I_2 \subset U_2$ mit $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^k$ offen

$\Theta : U_1 \to U_2$ bijektiv, stetig diffbar,

so dass auch $\Theta^{-1}$ stetig diffbar

Sei $\varphi_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ parametrisierte $k$-dim. Fläche

und $\varphi_1 := \varphi_2 \circ \Theta : I_1 \to \mathbb{R}^n$

Dann ist $\mathrm{Vol}(I_1, \varphi_1) = \mathrm{Vol}(I_2, \varphi_2)$

**Beweis:** Es gilt

$$\mathrm{Vol}(I_1, \varphi_1) = \int_{I_1} \sqrt{\det(\varphi_1'(x)^* \varphi_1'(x))} \, dx$$

18-1

$$= \int_{I_1} \det \Big[ \underbrace{\left(\varphi_2'(\Theta x)\cdot \Theta'(x)\right)^* \left(\varphi_2'(\Theta x)\cdot \Theta'(x)\right)}_{\Theta'(x)^* \, \varphi_2'(\Theta x)^* \cdot \varphi_2'(\Theta x)} \Big] \, dx$$

$$= \int_{I_1} \sqrt{\det\left(\varphi_2'(\Theta x)^* \cdot \varphi_2'(\Theta x)\right)} \cdot |\det \Theta'(x)| \, dx$$

$$\overset{6.10}{=} \int_{I_2} \sqrt{\det\left(\varphi_2'(y)^* \cdot \varphi_2'(y)\right)} \cdot dy$$

$$= \mathrm{Vol}(I_2, \varphi_2) \qquad \square$$

<u>18.8. Beispiel:</u> Flächeninhalt der Kugeloberfläche vom Radius $r > 0$:

$S_2(r) := \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = r \}$

Wir parametrisieren $S_2(r)$ wie in 18.3 (2) durch

$I = [0, \pi] \times [-\pi, \pi]$

$\varphi(s,t) = (r \cdot \sin s \cdot \cos t, \; r \cdot \sin s \cdot \sin t, \; r \cdot \cos s)$

$$\Rightarrow \varphi'(s,t) = \begin{pmatrix} r \cos s \cos t & -r \sin s \sin t \\ r \cos s \sin t & r \sin s \cos t \\ -r \sin s & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \varphi'(s,t)^* \cdot \varphi'(s,t) = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 s \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\det(\varphi'^* \varphi')} = r^2 \cdot |\sin s|$$

$$\Rightarrow \operatorname{Vol}(I, \varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\pi} r^2 \, |\sin s| \, ds \, dt$$

$$= 2\pi r^2 \, [-\cos s]_0^{\pi}$$

$$= 4\pi r^2$$

<u>18.9. Def.</u>: Seien $\mathcal{U}, V \subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $\alpha : \mathcal{U} \to V$ heißt <u>Diffeomorphismus</u>, falls $\alpha$ bijektiv ist und $\alpha$ und $\alpha^{-1}$ beide stetig diffbar sind.

<u>18.10. Def.</u>: a) Eine <u>k-dimensionale parametrisierte Untermannigfaltigkeit</u> von $\mathbb{R}^n$ $(n \geq k)$ ist eine parametrisierte Fläche $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, wo $I \subset \mathbb{R}^k$ offen ist, so dass $\varphi$ fortgesetzt werden kann zu einem Diffeomorphismus $\alpha : \mathcal{U} \to V$, wo $\mathcal{U}, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $I \subset \mathcal{U}$

$$\hookrightarrow I \subset \mathbb{R}^k \cong \mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$$


b) Eine <u>k-dimensionale Untermannigfaltigkeit</u> von $\mathbb{R}^n$ ist eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$, so dass zu jedem $x \in M$ eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^n$ existiert, so dass $M \cap V$ eine parametrisierte Untermannigfaltigkeit ist

Die Parametrisierung $I \xrightarrow{\varphi} M \cap V$ heißt <u>Karte</u>.

<u>18.11. Satz:</u> Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Untermannigfaltigkeit. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Maß Vol auf den Borelmengen von $M$, so dass für jede Karte $I \xrightarrow{\varphi} M \cap V$ und jede Borelmenge $E \subset I$ gilt:

$$\mathrm{Vol}(\varphi(E)) = \mathrm{Vol}(E, \varphi)$$

[ betrachte $M$ als metrischen Raum ⇝ offene Mengen ⇝ Borelmengen ]

<u>Beweisskizze:</u> Sei $A \subset M$ Borelmenge; man kann zeigen: $A = \dot{\bigcup}_{\text{abzählbar}} A_i$, so dass jedes $A_i$ in einer Karte $(I_i, \varphi_i)$ liegt.

Definiere dann

$$\mathrm{Vol}(A) := \sum_i \mathrm{Vol}(A_i)$$

$$:= \sum \mathrm{Vol}(\varphi_i^{-1}(A_i), \varphi_i)$$

zeige dann:
- dies ist unabhängig von Auswahl der Karten (benutze 18.7.)
- Vol ist $\sigma$-additiv, also Maß $\square$

18.12. Bemerkung: Wir haben Integration über M hier durch Integration über disjunkte Teile definiert, welche jeweils in einer Karte durchgeführt werden können. Diese Zerlegung wird üblicherweise umgangen, indem man über überlappende Karten integriert (M wird durch "Atlas" von Karten überdeckt), die Überlappung aber durch "Zerlegung der Eins" berücksichtigt.