19. Integral von Diff'formen

19.1. Def.: Sei $I \subset \mathbb{R}^p$ Borelmenge, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi: I \to U$ stetig diff'bar, und ω eine p-Form auf U.

Dann ist $\varphi^*(\omega)$ eine p-Form auf I, d.h.

$$\varphi^*(\omega) = f \, dx_1 \dots dx_p$$

für eine Fkt auf I.

Wir sagen, dass <u>ω bzgl φ integrierbar ist</u>, falls f integrierbar und wir setzen

$$\int_\varphi \omega := \int_I f \, d\lambda^p(x)$$

[beachte: $\varphi: I \to U$ stetig diff'bar heißt: φ kann fortgesetzt werden zu $\tilde{\varphi}: V \to U$, wo $V \subset \mathbb{R}^p$ offen und $I \subset V$; wir betrachten dann eigentlich $\tilde{\varphi}^*(\omega) = p$-Form auf V]

19.2. Beispiele: 1) Integration einer 1-Form entlang Kurve

$\rightsquigarrow$ Übungsblatt 13, Aufgabe 1

2) Integration einer 2-Form über eine parametrisierte 2-dim Untermannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$

also: $\mathbb{R}^2 \supset I \xrightarrow{\varphi} M$ 2-dim.

$$\omega = f_1\, dx_2 dx_3 + f_2\, dx_3 dx_1 + f_3\, dx_1 dx_2$$

Wir identifizieren ω mit Vektorfeld

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

(d.h. $\omega = \langle F, d\vec{S} \rangle$ in Schreibweise von Übungsblatt 12, Aufgabe 4)

Was ist $\varphi^* \omega$?

$$\varphi^*(\omega) = \underbrace{\varphi^*(f_1)}_{f_1 \circ \varphi} \underbrace{\varphi^*(dx_2)}_{?} \varphi^*(dx_3) + \dots$$

$$\varphi^*(dx_2) = d\, \varphi^* x_2 = d(\varphi \circ x_2)$$

$\uparrow$ 2-te Komp. Fkt

$x_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto y$

$$= d\, \varphi_2$$

$$\varphi : (s,t) \mapsto (\varphi_1(s,t), \varphi_2(s,t), \varphi_3(s,t))$$

also:

$$\varphi^*(dx_2) = \frac{\partial \varphi_2}{\partial s}\, ds + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t}\, dt$$

$$\Rightarrow \varphi^*\omega = \Big\{ \underbrace{f_1 \circ \varphi \cdot \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial s} \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} \right) + f_2 \circ \varphi (\ldots) + f_3 \circ \varphi (\quad)}_{\langle F \circ \varphi ,\, \tilde{n}(\varphi) \rangle} \Big\}\, ds\, dt$$

wobei

$$\tilde{n}(\varphi) := \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \\[2ex] \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \\[2ex] \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} \\[1ex] \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} \\[1ex] \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \\[1ex] \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \\[1ex] \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \end{pmatrix}$$

mit "Vektorprodukt" $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

Es gilt (nachrechnen!): $v \times w \perp v, w$ und

$$\|v \times w\|^2 = \det\left[\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \\ v_3 & w_3 \end{pmatrix}\right]$$

Somit: $\tilde{n}(\varphi)(s,t)$ ist Normalenvektor an der parametrisierten Fläche M in Pkt $\varphi(s,t)$ mit Länge

$$\|\tilde{n}(\varphi)\|^2 = \det\left[\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \end{pmatrix}}_{\varphi'^*} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial s} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} \end{pmatrix}}_{\varphi'}\right]$$

also

$$\|n(\varphi)(s,t)\| = \sqrt{\det\left(\varphi'(s,t)^* \, \varphi'(s,t)\right)}$$

Bezeichne $n(\varphi)$ den entsprechenden normierten Einheitsnormalenvektor, so gilt also:

$$\varphi^* \omega = \langle F \circ \varphi, n(\varphi) \rangle \cdot \sqrt{\det(\varphi'^* \cdot \varphi')} \, ds\,dt$$

Somit:

$$\int_\varphi \omega = \int_I \langle F(\varphi(s,t)), n(\varphi)(s,t)\rangle \cdot \sqrt{\det(\varphi'(s,t)^* \cdot \varphi'(s,t))}\; ds\, dt$$

$$= \int_M \langle F(\eta), n(\eta)\rangle \, d\,\mathrm{Vol}(\eta)$$

physikalische Interpretation: Falls
$F \hat{=}$ Strömungsvektor

$\Rightarrow \int_\varphi \omega \;\hat{=}\;$ Fluss durch Fläche M

3) konkretes Beispiel: Betrachte Parametrisierung (an...
der Kugeloberfläche $S_2(1)$ vom Radius 1,
vgl. 17.3
und wähle
$\omega(x,y,z) = x\, dy\, dz + y\, dz\, dx + z\, dx\, dy$

$\Leftrightarrow F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\Rightarrow F$ normal zur Kugeloberfläche, also

$$\langle F(\eta), n(\eta)\rangle = 1$$

$\Rightarrow \int \omega = \int d\mathrm{Vol}(\eta) = \mathrm{Vol}(M)$

Nun gilt (siehe 17.3):

$$\varphi^*\omega(u,v) = \cos v \, du\, dv$$

also

$$\int_\varphi \omega = \int_I \cos v \, du\, dv$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos v \, du\, dv$$

$$= 2\pi \cdot [\sin v]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= 4\pi$$

<u>19.3. Satz:</u> Sei $I \subset \mathbb{R}^p$ Borelmenge, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen

$\varphi : I \to U$ stetig diffbar

ω_1, ω_2 p-Formen auf U, $\lambda \in \mathbb{R}$

Dann gilt:

$$\int_\varphi (\omega_1 + \omega_2) = \int_\varphi \omega_1 + \int_\varphi \omega_2$$

und

$$\int_\varphi (\lambda \omega_1) = \lambda \int_\varphi \omega_1$$

Beweis: klar, da

$$\varphi^*(\omega_1+\omega_2) = \varphi^*\omega_1 + \varphi^*\omega_2$$

$$\varphi^*(\lambda\omega_1) = \lambda\,\varphi^*\omega_1 \qquad \square$$

19.4. Def. und Satz (Parameterwechsel):

Sei $I \subset \mathbb{R}^p$ Borelmenge, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen,

$\varphi: I \to U$ stetig diffbar

Sei $V_1, V_2 \subset \mathbb{R}^p$ offen, $I \subset V_1$

$\Theta: V_2 \to V_1$ Diffeomorphismus

$J := \Theta^{-1}(I) \subset V_2$

$\psi := \varphi \circ \Theta : J \to U$

Wir sagen, dass

Θ orientierungserhaltend ist, falls $\det \Theta'(x) > 0$ $\forall x \in J$

Θ orientierungsumkehrend ist, falls $\det \Theta'(x) < 0$ $\forall x \in J$

Sei nun ω eine p-Form auf U. Dann gilt

$\int_\psi \omega = \int_\varphi \omega$ falls Θ orientierungserhaltend

$\int_\psi \omega = -\int_\varphi \omega$ falls Θ orientierungsumkehrend

Wir beweisen zunächst

19.5. Proposition: Seien

$U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$, $W \subset \mathbb{R}^k$ offen

und

$$\varphi_1 : U \to V, \quad \varphi_2 : V \to W$$

stetig diffbar mit

$$U \xrightarrow{\varphi_1} V \xrightarrow{\varphi_2} W$$

Dann gilt

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1)^* = \varphi_1^* \circ \varphi_2^*$$

Beweis: Sei ω p-Form auf W; z.z.:

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1)^*(\omega) = \varphi_1^*(\varphi_2^*(\omega))$$

Es gilt: $(\varphi_2 \circ \varphi_1)^* \omega(x)(\xi_1, .., \xi_p) =$

$$= \omega(\varphi_2 \circ \varphi_1(x))((\varphi_2 \circ \varphi_1)'(x)\xi_1, \ldots)$$

$$= \omega(\varphi_2(\varphi_1(x)))(\varphi_2'(\varphi_1(x)) \cdot \varphi_1'(x)\xi_1, \ldots)$$

$$= \varphi_2^*\omega(\varphi_1(x))(\varphi_1'(x)\xi_1, ..)$$

$$= \varphi_1^*(\varphi_2^*\omega)(x)(\xi_1, \ldots, \xi_p)$$

□

Beweis von 19.4: Nach 19.5. und Aufgabenblatt 13, Aufgabe 4 gilt:

$$\psi^* \omega\,(x) = (\varphi \circ \Theta)^* \omega\,(x)$$
$$= \Theta^*(\varphi^* \omega)\,(x)$$
$$= \det(\Theta'(x))\; \varphi^* \omega\,(\Theta(x))$$

d.h. mit $\varphi^* \omega = f\, dx_1 \ldots dx_p$ gilt

$$\psi^* \omega = f \circ \Theta \cdot \det \Theta'\; dx_1 \ldots dx_p$$

Somit

$$\int_\psi \omega = \int_J (f \circ \Theta)(x)\, \det(\Theta'(x))\, d\lambda^p(x)$$

und

$$\int_\varphi \omega = \int_I f(x)\, d\lambda^p(x)$$

$$= \int_J f(\Theta(y)) \cdot \underbrace{|\det \Theta'(y)|}\, d\lambda^p(y)$$

$$= \begin{cases} +\det(\Theta'(y)) & \text{falls } \Theta \text{ o. erh.} \\ -\det(\Theta'(y)) & \text{falls } \Theta \text{ o. umk.} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} +\int_\psi \omega & \text{falls } \Theta \text{ orient. erhaltend} \\ -\int \omega & \text{falls } \Theta \text{ orient. umkehrend} \end{cases}$$