20 Berandete Mannigfaltigkeiten und Zerlegung der Eins

k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ sieht lokal aus wie $\mathbb{R}^k$

k-dim. berandete Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ sieht lokal aus wie "$\mathbb{R}^k$ mit Rand", d.h. wie der abgeschlossene Halbraum H^k

<u>20.1. Notation:</u> Wir setzen

$$H^k := \{ x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_k \geq 0 \}$$
$$\partial H^k := \{ x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_k = 0 \} \quad \text{Rand von } H^k$$

<u>20.2. Def.:</u> 1) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt eine <u>k-dimensionale berandete Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$</u>, wenn sie lokal diffeomorph zu H^k ist, d.h.:

Zu jedem $x \in M$ gibt es eine (in M) offene Umgebung U und einen Diffeomorphismus $\alpha: U \to \mathbb{R}^k$ auf eine offene Teilmenge $\alpha(U)$ von H^k

[beachte: U offen in $M \subset \mathbb{R}^n \iff \exists \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n: U = M \cap \tilde{U}$]

2) Jedes solche $\alpha : U \to H^k$ heißt <u>Karte</u> für M ; $\alpha^{-1} : \alpha(U) \to M$ heißt <u>Parametrisierung</u> für M

3) Eine Familie von Karten, deren Definitionsbereiche ganz M überdecken, heißt <u>Atlas</u> für M.

<u>20.3. Lemma:</u> Seien

$\alpha : U \to H^k$, $\beta : V \to H^k$

zwei Karten für M und sei $x \in U \cap V$.

Dann gilt:

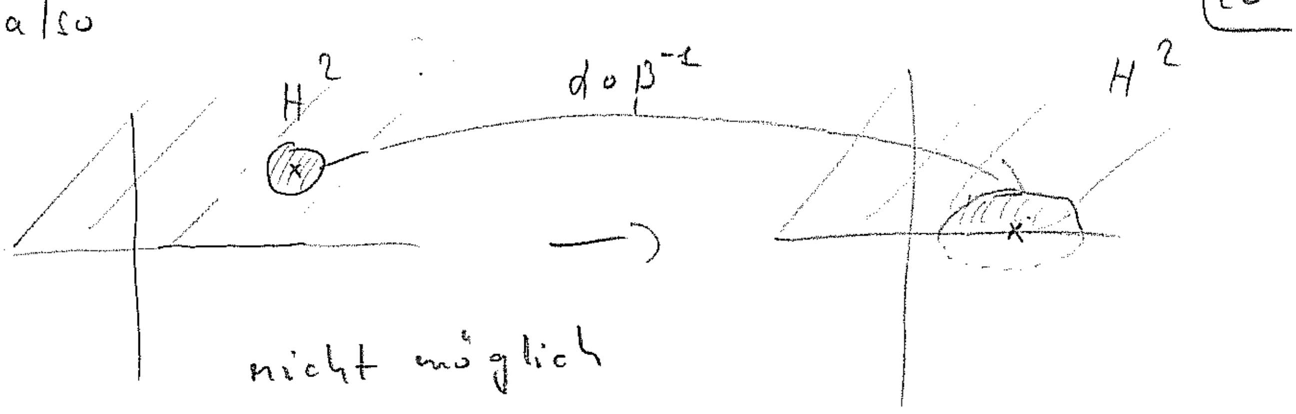
$$\alpha(x) \in \partial H^k \iff \beta(x) \in \partial H^k$$

<u>Beweis:</u> Betrachte

$$\begin{array}{ccccc} \alpha \circ \beta^{-1} : \beta(U \cap V) & \xrightarrow{\beta^{-1}} & U \cap V & \xrightarrow{\alpha} & \alpha(U \cap V) \\ \cap & & & & \cap \\ H^k & & & & H^k \end{array}$$

Dann ist $\alpha \circ \beta^{-1}$ Diffeomorphismus von offener Teilmenge von H^k auf offene Teilmenge von H^k.

Da Differential $\neq 0$, ist $\alpha \circ \beta^{-1}$ lokal invertierbar in Umgebung in $\mathbb{R}^k$, d.h. innere Pkte von H^k können nicht auf ∂H^k abgebildet werden also



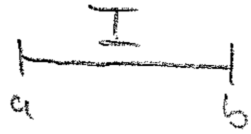
d.h. $\alpha\circ\beta^{-1}$ bildet Rand auf sich ab

also: $\beta(x)\in\partial H^k \Rightarrow \underbrace{\alpha\circ\beta^{-1}(\beta(x))}_{\alpha(x)} \in \partial H^k$ $\square$

<u>20.4. Def.</u>: Sei M eine k-dim berandete Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Die Pkte $x\in M$, die von einer (und somit von allen) Karte in ∂H^k abgebildet werden, heißen <u>Randpunkte</u> von M. Die Menge dieser Pkte heißt <u>Rand</u> von M und wird mit ∂M bezeichnet.

<u>20.5. Bem.</u>: 1) ∂M ist leer oder eine $(k-1)$-dim. Untermannigfaltigkeit

2) Beachte: ∂M ist <u>nicht</u> der topologische Rand bzgl. der Einbettung in $\mathbb{R}^n$

z.B. 

im $\mathbb{R}^2$ hat $\partial I = \{a,b\}$

aber $\underbrace{I\cap\overline{\mathbb{R}^2\setminus I}}_{\text{top. Rand in } \mathbb{R}^2} = I$

3) Da $\alpha|_{\partial M}: \mathcal{U} \cap \partial M \to \partial H^k \hat{=} \mathbb{R}^{k-1}$ (20-

ein Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^{k-1}$ ist, ist ∂M $(k-1)$-dimensional und hat keinen Rand:

$$\partial(\partial M) = \emptyset$$

<u>20.6. Satz (Zerlegung der Eins):</u>

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine kompakte berandete k-dim. Untermannigfaltigkeit und

$$(\alpha_t : \mathcal{U}_t \to H^k)_{t \in I} \quad (I \text{ Indexmenge})$$

ein Atlas für M. Dann gibt es endlich viele stetig diffbare Fkten

$$\lambda_1, .., \lambda_m : M \to [0,1]$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\forall i \in \{1, .., m\} \; \exists t \in I:$

$$\underbrace{\operatorname{supp} \lambda_i}_{\overline{\{x \mid \lambda_i(x) \neq 0\}}} \subset \mathcal{U}_t \quad (\text{Träger von } \lambda_i)$$

(ii) $\forall x \in M$ gilt

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) = 1$$

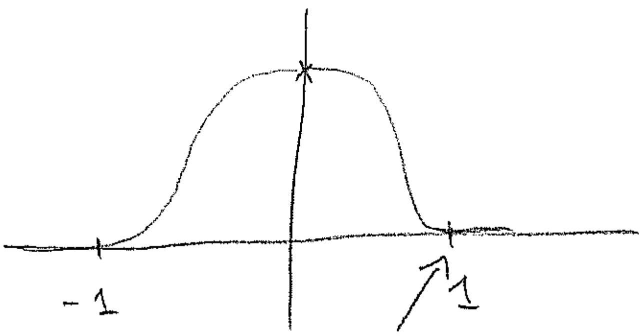
<u>Beweis:</u> (1) Für offenes $U \subset H^k$, $x \in U$ gibt es (unendlich oft) stetig diffbare Fkt

$f : H^k \to \mathbb{R}$ mit

- $f \geq 0$
- $f(x) = 1$
- $\operatorname{supp} f \subset U$

denn: für $k = 1$ wähle Reskalierung von

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) & |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



$f(0) = 1$

$\operatorname{supp} f = [-1, 1]$

unendlich oft diffbar

$f^{(n)}(1) = 0 \quad \forall n$

für $k > 1$ nimm Produkte von solchen Fkten für alle Koordinatenrichtungen

(2) Für $x \in M$ wähle Karte $\alpha_{t(x)}$ mit $x \in \mathcal{U}_{t(x)}$

$\Rightarrow \alpha_{t(x)}(\mathcal{U}_{t(x)}) \subset H^k$ offen

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \exists f_x : H^k \to \mathbb{R}$ mit

$$f_x(\alpha_{t(x)}(x)) = 1 \quad , \quad f_x \geq 0$$

$$\operatorname{supp} f_x \subset \alpha_{t(x)}(\mathcal{U}_{t(x)})$$

Setze

$$\tilde{\lambda}_x(y) := \begin{cases} f_x(\alpha_{t(x)}(y)) & y \in \mathcal{U}_{t(x)} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\Rightarrow \tilde{\lambda}_x : M \to \mathbb{R}$ hat Eigenschaften

- $\operatorname{supp} \tilde{\lambda}_x$ liegt in einer Karte (nämlich in $\mathcal{U}_{t(x)}$)
- $\tilde{\lambda}_x(x) = 1$ und $\tilde{\lambda}_x \geq 0$

Setze $V_x := \{ y \mid \tilde{\lambda}_x(y) > 0 \}$

offen und nicht leer (da $x \in V_x$)

$\Rightarrow \{ V_x \mid x \in M \}$ ist offene Überdeckung von M

M kompakt $\Rightarrow$ endlich viele dieser Mengen überdecken M

also: $\exists\, x_1, \dots, x_m$ mit

$$M = V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_m}$$

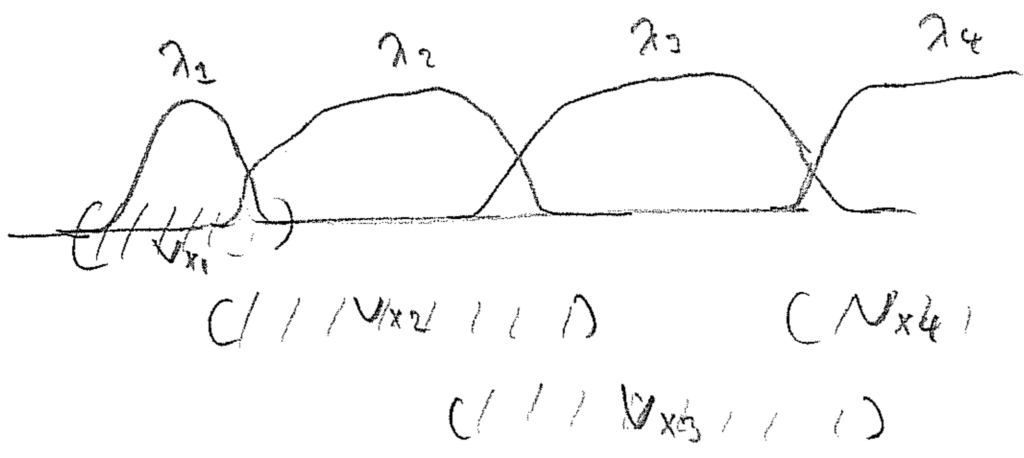
$$\Rightarrow \quad \sigma := \tilde{\lambda}_{x_1} + \dots + \tilde{\lambda}_{x_m} > 0 \quad \text{überall auf } M$$

d.h. wir können definieren

$$\lambda_i := \frac{\tilde{\lambda}_{x_i}}{\sigma}$$

Dann gilt: $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$

und Träger von λ_i ($= \operatorname{supp} \tilde{\lambda}_{x_i}$) liegt in einer Karte (nämlich in $U_{t(x_i)}$)



$\square$

<u>20.7. Bemerkung:</u> Bis jetzt haben wir Integral über Diff'formen nur für eine Karte (d.h. eine Parametrisierung) definiert. Mit Zerlegung der Eins können wir Integral über ganze

Mannigfaltigkeit zusammensetzen

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^m \int_M \lambda_i \omega = \sum_{i=1}^m \int_{\varphi_i} \lambda_i \omega$$

wobei $\varphi_i = \alpha_{t(x_i)}^{-1}$ die Parametrisierung der Karte ist, auf der $\lambda_i \omega$ lebt.

Es bleibt natürlich z.z., dass diese Def. unabh. von der Wahl der Karten und der gewählten Zerlegung der Eins ist.

Dies folgt im wesentlichen wie in 19.4 mit Hilfe der Transformationsformel. Allerdings bekommt man dort eventuell einen Vorzeichenwechsel und für eine sinnvolle Theorie sollte man in der Lage sein, dieses Vorzeichen über den ganzen Atlas hinweg zu kontrollieren.

Dies geht nur für "orientierbare" Mannigfaltigkeiten.