21. Orientierung von Mannigfaltigkeiten und ihrer Ränder

21.1. Def.: 1) Ein Atlas $(\alpha_t : \mathcal{U}_t \to H^k)_{t\in I}$ von M heißt <u>orientiert</u>, wenn für je zwei Karten α_t und α_s der Kartenwechsel

$$\Theta := \alpha_t \circ \alpha_s^{-1}\big|_{\alpha_s(\mathcal{U}_s \cap \mathcal{U}_t)} :$$

$$\begin{array}{ccccc} \alpha_s(\mathcal{U}_s\cap\mathcal{U}_t) & \xrightarrow{\alpha_s^{-1}} & \mathcal{U}_s\cap\mathcal{U}_t & \longrightarrow & \alpha_t(\mathcal{U}_s\cap\mathcal{U}_t) \\ \cap & & & & \cap \\ H^k & & & & H^k \end{array}$$

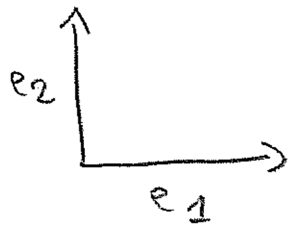
positive Funktionaldeterminante hat, d.h.

$$\det \Theta'(x) > 0 \qquad \forall x \in \alpha_s(\mathcal{U}_s \cap \mathcal{U}_t)$$

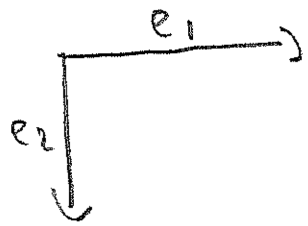
2) Eine <u>orientierte Mannigfaltigkeit</u> ist eine Mannigfaltigkeit zusammen mit einem orientierten Atlas

3) Eine Mannigfaltigkeit heißt <u>orientierbar</u>, falls sie einen orientierten Atlas besitzt.

<u>21.2. Bem.</u>: 1) Orientierbarkeit von M heißt, dass man in konsistenter Art eine positiv orientierte Basis stetig im Tangentialraum von M auszeichnen kann



positiv orientiert



negativ orientiert

2) Falls $M \subset \mathbb{R}^n$ $(n-1)$-dimensional, so ist M orientierbar, falls man in konsistenter Art einen Normalenvektor stetig auf M auszeichnen kann, d.h. man kann konsistent das "Innere" vom "Äußeren" von M unterscheiden

Beispiel: $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ ist orientierbar aber Möbiusband ist nicht orientierbar

3) Ist $\alpha : \mathcal{U} \to H^k$ eine Karte von M mit $\mathcal{U} \cap \partial M \neq \emptyset$, so ist

$$\alpha|_{\mathcal{U} \cap \partial M} : \mathcal{U} \cap \partial M \to \mathbb{R}^k$$

eine Karte für ∂M (vgl. 20.3)

Gleichorientierte Karten für M liefern gleichorientierte Karten für ∂M und ein orientierter Atlas für M liefert orientierten Atlas für ∂M.

Also: Orientierung auf M induziert Orientierung auf ∂M.

<u>21.3 Def.</u>: Sei M k-dim kompakte, orientierbare Mannigfaltigkeit. Dann gibt es orientierten Atlas und dazu gehörige Zerlegung der Eins $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ gemäß 20.6. Wir definieren dann für eine k-Form ω auf M ihr Integral über M als

$$\int_M \omega := \sum_{i=1}^m \int_M \lambda_i \omega := \sum_{i=1}^m \int_{\varphi_i} \lambda_i \omega$$

wobei $\varphi_i = \alpha_{t(x_i)}^{-1}$ die Parametrisierung der zu λ_i gehörigen Karte ist.

<u>21.4. Bem.</u>: Man zeigt dann, dass diese Def. von den gemachten Wahlen unabhängig ist:

- Unabhängigkeit von Wahl der Zerlegung der Eins
- Unabhängigkeit von Wahl des orientierten Atlas bis auf globales Vorzeichen

→ positiv orientierter Atlas versus negativ — " —

→ Freiheit, was wir "Inneres" und was "Äußeres" nennen