22. Der Satz von Stokes

22.1. Satz von Stokes: Sei M eine k-dimensionale kompakte, orientierte berandete Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$. Der Rand ∂M trage die induzierte Randorientierung. Sei ω eine $(k-1)$-Form auf M. Dann gilt

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Insbesondere gilt: Ist $\partial M = \emptyset$, so ist

$$\int_M d\omega = 0$$

Beweis: 1) zunächst für Parametrisierung in einer Karte, d.h.

ω sei $(k-1)$-Form auf $\mathbb{R}^k$ mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\int_{H^k} d\omega = \int_{\partial H^k} \omega$$

(Parametrisierung von H^k ist hier die identische Abb denn: Sei

$$\omega = \sum_{j=1}^{k} f_j \, dx_1 .. \check{dx_j} .. dx_k$$

$$\Rightarrow d\omega = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} (-1)^{j-1} \, dx_1 \ldots dx_k$$

$$\Rightarrow \int_{H^k} d\omega = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \underbrace{\int_{H^k} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \, dx_1 \ldots dx_k}_{(*)}$$

In (*) integrieren wir gemäß Fubini erst über die j-te Variable; dafür gilt:

$$j = k: \int_0^{\infty} \frac{\partial f_k}{\partial x_k} \, dx_k = \underbrace{f_k(x_1, .., x_{k-1}, \infty)}_{=0,\text{ da } f \text{ komp. Träger}} - f_k(x_1, .., x_{k-1}, 0)$$

$$j \neq k: \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f_j}{\partial x_j} \, dx_j = f_j(.., \infty, ..) - f(.., -\infty, ..$$

$= 0$, da komp. Träger

$$\Rightarrow \int_{H^k} d\omega = (-1)^k \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_k(x_1,\dots,x_{k-1},0)\, dx_1 \dots dx_{k-1}$$

nun betrachte $\int_{\partial H^k} \omega$

Dazu brauchen wir Parametrisierung von ∂H^k als $(k-1)$-dim. Mfkeit. Nimm

$$\varphi : \mathbb{R}^{k-1} \to \partial H^k$$

$$(x_1,\dots,x_{k-1}) \mapsto (x_1,\dots,x_{k-1},0)$$

Da $\varphi^*(dx_k) = 0$ überlebt in $\varphi^*\omega$ nur der Term mit $j = k$, d. h.

$$\varphi^*\omega = \underbrace{\varphi^*(f_k)}_{f_k \circ \varphi}\ \underbrace{\varphi^*(dx_1)}_{dx_1} \dots \underbrace{\varphi^*(dx_{k-1})}_{dx_{k-1}}$$

$$= f_k \circ \varphi \; dx_1 \dots dx_{k-1}$$

d.h.

$$\int_{\partial H^k} \omega = \pm \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \varphi^*\omega = \pm \int_{\mathbb{R}^{k-1}} f_k(x_1,\dots,x_{k-1},0)\, dx_1 \dots dx_{k-1}$$

induzierte Randorientierung gibt Vorz. $(-1)^k$.

(2) Aussage gilt, falls Träger von ω ganz in einer Karte liegt, da dies durch Zurückziehen auf (1) führt

(3) betrachte nun allgemeinen Fall:
Wähle orientierten Atlas und dazu gehörige Zerlegung der Eins $\lambda_1, \dots, \lambda_m$.
Dann gilt Satz nach (2) für jedes $\lambda_i \omega$
d.h.

$$\int_M d(\lambda_i \omega) = \int_{\partial M} \lambda_i \omega$$

$$\Longrightarrow \sum_{i=1}^{m} \int_M d(\lambda_i \omega) = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \int_{\partial M} \lambda_i \omega}$$

$$= \int_{\partial M} \Big(\sum_i \lambda_i\Big) \omega$$

$$= \int_{\partial M} \omega$$

für rechte Seite gilt:

$$d(\lambda_i \omega) = d\lambda_i \wedge \omega + \lambda_i \, d\omega$$

Da $\sum \lambda_i = 1 \Rightarrow \sum d\lambda_i = d1 = 0$

also:

$$\sum_i \int_M d(\lambda_i \omega) = \int_M \Big(\underbrace{\sum_i d\lambda_i}_{0} \wedge \omega + \underbrace{\sum_i \lambda_i}_{1} \, d\omega \Big)$$

$$= \int_M d\omega$$

also schließlich: $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$ $\square$

<u>22.2. Bemerkung:</u> 1) Für nicht kompakte M gilt Satz nicht in dieser Allgemeinheit, man braucht dann Voraussetzungen, die die Randterme $f(\ldots, \infty, \ldots)$ in der partiellen Integration verschwinden lassen

2) Man kann Satz auch verallgemeinern für M, wo der Rand auch "Ecken" haben darf (von niedrigerer Dimension), z. B. für Würfel

<u>22.3. Bemerkung</u>: 1) Eine p-Form ω auf einer k-dim. Mfkt $M \subset \mathbb{R}^n$ ist nach unserer Def. eine Multilinearform auf $\mathbb{R}^n$, d.h. die p Argumente von $\omega(x)$ können Vektoren aus $\mathbb{R}^n$ sein. Allerdings benutzen wir in allen konkreten Rechnungen nur die bzgl. einer Parametrisierung $\varphi: I \to M$ zurückgeholte Form $\varphi^*\omega$, und für die gilt:

$$\varphi^*\omega(x)(v_1,\dots,v_p) = \omega(\varphi(x))\underbrace{(\varphi'(x)v_1,\dots,\varphi'(x)v_p)}$$

diese Vektoren sind nicht beliebig, sondern liegen im <u>Tangentialraum</u> von M am Pkt $\varphi(x)$

Somit sind p-Formen auf M eigentlich Multilinearformen auf dem Tangentialraum.

2) Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dim, so ist auch dim Tang.raum $= k$, d.h. effektiv sind p-Formen auf M für $p > k$ gleich Null

22.4. Retraktionssatz: Sei

$B^n := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \}$ n-dim. abg. Kugel

$S^{n-1} := \partial B^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1 \}$

(n-1)-dim. Kugeloberfläche

Dann gibt es keine zweimal stetig diffbare Abb. $\Phi : B^n \to \mathbb{R}^n$, so dass gilt

$$\Phi(B^n) \subset \partial B^n = S^{n-1}$$

und

$$\Phi|_{\partial B^n} = id$$

Beweis: Sei Φ eine solche Abb.

Betrachte auf $\mathbb{R}^n$ die (n-1)-Form

$$\omega = x_1 dx_2 \dots dx_n$$

$\Rightarrow d\omega = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ n-Form auf $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \Phi^*(d\omega)$ n-Form auf (n-1) dim. Tangentialraum von S^{n-1}

(da Φ in S^{n-1} abb.)

also, $\Phi^*(d\omega) = 0$

$$\Rightarrow \int_{\partial B^n} \Phi^*\omega \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{B^n} \underbrace{d\Phi^*\omega}_{\Phi^*(d\omega) = 0} = 0$$

aber: $\phi|_{\partial B^n} = id$

$$\Rightarrow \Phi^*\omega|_{\partial B^n} = \omega|_{\partial B^n} = x_1 dx_2 \ldots dx_n|_{\partial B^n}$$

also: $$0 = \int_{\partial B^n} \Phi^*\omega = \int_{\partial B^n} \omega$$

$$\overset{\text{Stokes}}{=} \int_{B^n} d\omega$$

$$= \int_{B^n} dx_1 \ldots dx_n$$

$$= \mathrm{vol}(B^n)$$

Wdsp □

<u>22.5. Korollar (Brouwersche Fixpunktsatz):</u>

Jede stetige Abbildung $f: B^n \to B^n$ der abg. Einheitskugel des $\mathbb{R}^n$ in sich besitzt mindestens einen Fixpkt

<u>Beweis</u>: 1) Durch Approximationsargumente (Weierstraßsch Approximationssatz) wird "stetige" Fall auf Fall von Polynomen zurückgeführt.

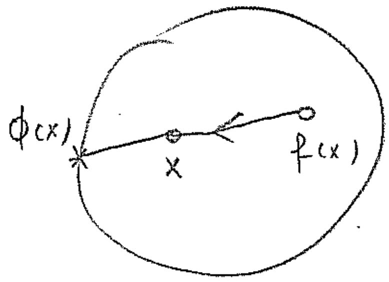
beliebig oft diffbar

2) Für einmal stetig diffbares f ergibt sich Beh. aus Retraktionssatz wie folgt:

Für f ohne Fixpkt definiere ϕ wie folgt:

$\phi(x)$ = Schnittpkt von $\overrightarrow{f(x)\,x}$ mit ∂B^n

(insbesondere: $\phi(x) = x$ für $x \in \partial B^n$)



$\Rightarrow$ ϕ hat Eigenschaften wie in 23.4, kann also nicht existieren

Wdsp $\square$