Funktionalanalysis

0. Einführung

FA = Theorie unendlich dimensionaler Räume und (linearer) Abbildungen ~~zwischen~~ solchen

ein historischer Ausgangspkt:

Integralgleichungen (⇝ partielle Dglen)

$$\varphi(s) = f(s) + \lambda \int_a^b k(s,t)\, f(t)\, dt$$

φ gegeben, f gesucht
(in Abhängigkeit von λ)

Spektraltheorie ⇝ Suche nach "Eigenwerten" λ und "Eigenvektoren" f

$\hat{=}$ "Diagonalisierung von Matrizen"

lineare Gleichungen mit Funktionen als Unbekannte

Fredholm (~1900)	⇝ Integraloperatoren (kompakte Operatoren)
Hilbert (~1910)	⇝ Spektraltheorie von allgemeinen beschränkten Operatoren
Riesz	lineare Abb. auf allgemeinen normierten Räumen L^P, $C(X)$ kompakte Operatoren
von Neumann (~1925)	unbeschränkte Operatoren auf HR → Quantenmechanik allgemeine Spektraltheorie
Gelfand (~1943)	Banachalgebren C^*-Algebren von Neumann Algebren

unendlich-dimensionale lineare Räume

≙ Verallgemeinerungen von $\mathbb{C}^n$ (oder $\mathbb{R}^n$)

↳ - Hilberträume

- Banachräume

- lokal-konvexe Vektorräume

verschiedene Möglichkeiten für Konvergenz auf Funktionenräumen, z.B.

pktweise, L^p, glm

→ verschiedene Räume:

$C(\mathbb{R})$, $L^2(\mathbb{R})$, $L^p(\mathbb{R})$,

Sobolev-Räume, ...

lineare Abb. zwischen solchen Räumen

≙ unendlich-dim. Versionen von Matrizen

beachte:

dim $< \infty$: linear ⟹ stetig

somit: Theorie linearer Abb.

im Endlich-dim ≙ lineare Algebra

dim $= \infty$: linear $\not\Rightarrow$ stetig

somit: Theorie linearer Abb. im Unendlich-Dimensionalen

$\hat{=}$ $\underbrace{\text{lineare Algebra + Analysis}}$

$\hat{=}$ Funktionalanalysis

Literatur

Conway, Meise / Vogt, Werner

Rudin: Functional Analysis

Pedersen: Analysis Now!

Reed / Simon: Math. Physics I