1. Hilberträume

1.1. Erinnerung (vgl. Kap 2, Ana II):

Ein Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist ein komplexer Vektorraum, versehen mit Skalarprodukt

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$$

der bzgl. der induzierten Norm

$$\| x \| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (x \in \mathcal{H})$$

vollständig ist

[Ein Skalarprodukt hat die Eigenschaften:

(i) linear im ersten Argument:

$$\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \quad \forall x, y, z \in \mathcal{H}$$

(ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$

(iii) $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}$

(iv) "=" $\iff x = 0$]

$$\ell_2 = L^2(\mathbb{N}, \text{Zählmaß})$$
$$= \{ x = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \alpha_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty \}$$

also

$$\langle (\alpha_n)_{n=1}^{\infty}, (\beta_n)_{n=1}^{\infty} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \overline{\beta_n}$$

Wesentliche Beispiele für HR:

- $\mathbb{C}^n$ mit

$$\langle (\alpha_i)_{i=1}^n , (\beta_i)_{i=1}^n \rangle := \sum_{i=1}^n \alpha_i \overline{\beta_i}$$

endlich-dimensional

(*) l_2

- $L^2(\mu)$ mit

$$\langle f, g \rangle := \int f \overline{g} \, d\mu$$

im Allgemeinen unendlich-dimensional

Es gilt in HRen:

- Cauchy-Schwarz

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \qquad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

"=" gdw x, y linear abh

- Die Abb.

$x \mapsto \langle x, y \rangle$

$x \mapsto \langle y, x \rangle$ (für festes $y \in \mathcal{H}$)

$x \mapsto \|x\|$

sind stetig

- Polarisationsgleichungen

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x,y \rangle$$

$$\langle x,y \rangle = \frac{1}{4} \{ \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i \|x+iy\|^2 - i \|x-iy\|^2 \}$$

- Parallelogrammgleichung

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2 (\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

- Satz von Pythagoras

Sei $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{H}$ mit $\langle x_i, x_j \rangle = 0 \ \forall i \neq j$, dann gilt:

$$\|x_1 + \cdots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2$$

<u>1.2. Def</u>: Ein Hilbertraum heißt <u>separabel</u>, falls er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

<u>1.3. Bem</u>: 1) $\mathbb{C}$ ist separabel; dichte Teilmenge ist $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$

2) ebenso $\mathbb{C}^n$

3) Auch unendl.-dim. HR sind typischerweise separabel, z.B. $L^2(\mathbb{R})$

4) Wir betrachten nur separable HRe

1.4. Def.: Sei $I \neq \emptyset$ und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.

1) Eine Familie $(e_i)_{i \in I}$ heißt <u>Orthonormalsystem</u> (ONS), falls

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i, j \in I$$

2) Eine <u>Orthonormalbasis</u> (ONB) von $\mathcal{H}$ ist ein maximales ONS, d.h. ein ONS, welches in keinem echt größeren ONS enthalten ist.

1.5. Bem.: 1) Statt "ONB" sagt man auch "vollständiges ONS"

2) Es gilt (Übung):

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{H} \text{ separabel} \\ (e_i)_{i \in I} \text{ ONS} \end{array}\right\} \Rightarrow I \text{ abzählbar}$$

3) Das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren erlaubt die Konstruktion eines ONS aus linear unabhängigen Elementen

4) Daraus folgt die Existenz einer ONB für separable HR. Im allgemeinen Fall gilt dies auch, man braucht aber dann das Auswahlaxiom.

5) Beachte Unterschied zwischen ONB für Hilberträume und "Basis" (= Hamel Basis) von Vektorräumen aus linearer Algebra

vgl. Ana II, 15.9

<u>1.6 Satz von Parseval</u> (vgl. Ana II, 15.8):

Sei $(e_i)_{i\in I}$ ein ONS in einem (separablen) HR $\mathcal{H}$. Dann sind äquivalent:

(i) $(e_i)_{i\in I}$ ist eine ONB

(ii) Falls $x \in \mathcal{H}$ und $\langle x, e_i\rangle = 0 \quad \forall i \in I$

$\Rightarrow x = 0$

(iii) Falls $x \in \mathcal{H}$, dann gilt

$$x = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle e_i$$

(iv) Falls $x \in \mathcal{H}$, dann gilt

$$\|x\|^2 = \sum_{i\in I} \langle x, e_i\rangle^2$$

(v) Das lineare Erzeugnis

$$\left\{ \sum_{i=1}^{N} \alpha_i e_i \;\middle|\; N \in \mathbb{N},\ \alpha_i \in \mathbb{C} \right\}$$

ist dicht in $\mathcal{H}$.

<u>1.7. Satz:</u> Sei $\mathcal{H}$ ein separabler HR und $(e_i)_{i\in I}$ und $(f_j)_{j\in J}$ zwei ONBen.

Dann haben I und J die gleiche Mächtigkeit, d.h.

$$|I| = |J| \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

$\uparrow$ abzählbar Unendlich aleph$_0$ $\aleph_0$

<u>Beweis:</u> Falls $|I| < \infty$ oder $|J| < \infty$,

Beh. klar

$\Big($ da $e_i = \sum_{j=1}^{|J|} \alpha_{ij} f_j$ falls $|J|$ endlich

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow |I| \leq |J| \\ &\overset{I \leftrightarrow J}{\Longrightarrow} |J| \leq |I| \end{aligned}\right\} \Rightarrow |I| = |J| \;\Big)$$

Seien $|I|$, $|J|$ unendlich

$\overset{1.5.(?)}{\Longrightarrow}$ $|I| =$ abzählbar unendlich $= |J|$ $\square$

1.8 Def.: Die Mächtigkeit einer ONB eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$ heißt (Hilbertraum-) <u>Dimension</u> von $\mathcal{H}$.

Notation: $\dim \mathcal{H}$

1.9. Beispiele: $\dim \mathbb{C}^n = n$

$$\dim l_2 = \infty$$

1.10. Def.: $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ seien Hilberträume. Ein <u>Isomorphismus</u> zwischen $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ ist eine lineare Abbildung

$$U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$$

mit

(i) U ist surjektiv

(ii) $\langle Ux, Uy \rangle_{\mathcal{K}} = \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$

Gibt es einen Isomorphismus zwischen $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$, so heißen sie <u>isomorph</u>.

1.11. Bem.: 1) (ii) impliziert also insbesondere

$$\|Ux\| = \langle Ux, Ux \rangle^{1/2} = \langle x, x \rangle^{1/2} = \|x\|,$$

d.h. U erhält die Norm, ist also eine <u>Isometrie</u>

2) Eine Isometrie ist automatisch injektiv, da

$$Ux = 0 \Rightarrow \underset{\|x\|}{\underset{\shortparallel}{\|Ux\|}} = 0 \Rightarrow x = 0$$

3) Falls $\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{K} < \infty$, so ist injektiv $\Leftrightarrow$ bijektiv $\Leftrightarrow$ surjektiv, (i) also überflüssig

4) Falls $\dim \mathcal{H} = \dim \mathcal{K} = \infty$, so kann auf (i) nicht verzichtet werden, es gibt nicht-surjektive Isometrien im Unendlich-Dimensionalen.

Beispiel. $S: \ell^2 \to \ell^2$ einseitige Shift

$$(\alpha_1, \alpha_2, ..) \mapsto (0, \alpha_1, \alpha_2, ..)$$

S ist isometrisch:

$$\langle Sx, Sy \rangle = \langle x, y \rangle \quad \forall x, y \in \ell^2$$

aber nicht surjektiv: Es gibt kein x mit $Sx = (1, 0, 0, ..)$

1.12. Satz: Zwei (separable) HR sind genau dann isomorph, wenn sie die gleiche Dimension besitzen.

Beweis: 1) Seien $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ isomorph, d.h. $\exists$ Isomorphismus $\mathcal{U}: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$

Sei $(e_i)_{i\in I}$ ONB von $\mathcal{H}_1$

$\Rightarrow$ $(\mathcal{U}e_i)_{i\in I}$ ONB von $\mathcal{H}_2$

[ONS klar; benutze z.B. 1.6 (v) um zu sehen, dass ONB]

$\Rightarrow$ $\dim \mathcal{H}_2 = |I| = \dim \mathcal{H}_1$

2) Sei nun $\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_2 = |I|$

$\Rightarrow$ $\exists$ ONB $(e_i)_{i\in I}$ von $\mathcal{H}_1$

$\exists$ ONB $(f_i)_{i\in I}$ von $\mathcal{H}_2$

Definiere nun $\mathcal{U}: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ durch

$$\mathcal{U}\Big(\sum_{i\in I} \alpha_i e_i\Big) = \sum_{i\in I} \alpha_i f_i$$

beachte: - jedes $x \in \mathcal{H}_1$ hat die Form

$$x = \sum \alpha_i e_i \quad \text{mit} \quad \alpha_i = \langle x, e_i\rangle$$

$$\Big(\text{und } \sum |\alpha_i|^2 = \sum |\langle x, e_i\rangle|^2 = \|x\|^2 < \infty\Big)$$

- diese Darstellung ist eindeutig, d.h.

$$x = \sum_{i \in I} \alpha_i e_i \Rightarrow \langle x, e_i \rangle = \alpha_i$$

also: U surjektiv und

$$\langle U(\sum_i \alpha_i e_i), U(\sum_j \beta_j e_j) \rangle =$$

$$= \langle \sum_i \alpha_i f_i, \sum_j \beta_j f_j \rangle$$

$$= \sum_{i,j} \alpha_i \overline{\beta_j} \underbrace{\langle f_i, f_j \rangle}_{\delta_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle}$$

$$= \langle \sum_i \alpha_i e_i, \sum_j \beta_j e_j \rangle \qquad \square$$

1.13 Bem: Somit haben wir also: Ein separabler HR ist isomorph zu $\mathbb{C}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ oder isomorph zu l^2. Es gilt, bis auf Isomorphie, nur einen unendlich-dimensionalen separablen HR.