10. Spektraltheorie kompakter Operatoren

10.1. Motivation: Betrachte die (Fredholmsche) Integralgleichung:

$$\int k(s,t)\, f(t)\, dt - \lambda f(s) = g(t)$$

wobei (für festes k)

- g gegeben
- λ Parameter $\in \mathbb{C}$ ($\hat{=}$ Randbedingungen) "Eigenwert" des Problems
- f gesucht

Problem: Existenz und Eindeutigkeit der Lösung f, in Abhängigkeit von g und λ

abstrakt: $Kf - \lambda f = g$

$$(K - \lambda 1) \cdot f = g$$

$$\Rightarrow \quad f = (K - \lambda 1)^{-1} g$$

also:
- wann existiert $(K - \lambda 1)^{-1}$?
- was passiert, wenn $(K - \lambda 1)^{-1}$ nicht existiert ?

Betrachte endlich-dim. Fall:

A $n \times n$ - Matrix, dann

$(A - \lambda 1)^{-1}$ existiert nicht

$\Leftrightarrow (A - \lambda 1)^{-1} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ nicht bijektiv

$\Leftrightarrow (A - \lambda 1)$ nicht injektiv

$\Leftrightarrow \exists\, x \neq 0 : (A - \lambda 1)x = 0$

$\Leftrightarrow \lambda$ Eigenwert $: \exists\, x \neq 0 : Ax = \lambda x$

<u>10.2. Def</u>: Sei X komplexer Banachraum und $A \in B(X)$.

1) Das <u>Spektrum</u> von A ist die Menge

$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda \cdot 1 : X \to X$ nicht bijekt.$\}$

$\subset \mathbb{C}$ ($1 \hat{=}$ id identische Abb)

Das komplement

$\rho(A) := \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$

heißt <u>Resolventenmenge</u> von A.

2) $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt <u>Eigenwert</u> von A, falls

$\exists\, 0 \neq x \in X : Ax = \lambda x$

(d.h. $A - \lambda 1$ nicht injektiv)

x heißt dann <u>Eigenvektor</u> zu λ

3) $\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda$ Eigenwert von $A\}$

heißt <u>Punktspektrum</u> von A.

<u>10.3. Bem.:</u> 1) Es gilt $\sigma_p \subset \sigma$

Falls $\dim X < \infty \Rightarrow \sigma = \sigma_p$

aber für $\dim X = \infty$ ist im Allgemeinen

$$\sigma_p \subsetneq \sigma$$

2) $\sigma_p = \emptyset$ ist möglich, aber wir werden später sehen, dass immer $\sigma \neq \emptyset$

3) $\lambda \notin \sigma(A) \Rightarrow (A - \lambda 1)$ bijektiv

$$\overset{6.4.}{\Rightarrow} (A - \lambda 1)^{-1} \in B(X)$$

d.h.

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (A - \lambda 1)^{-1} \in B(X)\}$$

<u>10.4. Beispiel:</u> Betrachte $X = C[1,2]$

und $A : X \to X$ mit

$$(Af)(t) = t \cdot f(t)$$

Dann ist $A \in B(X)$ (mit $\|A\| = 2$.)

und es gilt:

i) $\sigma_p(A) = \emptyset$

denn $Af = \lambda f$ heißt: $t f(t) = \lambda f(t) \ \forall 1 \le t \le 2$

$\Rightarrow f(t) = 0 \ \forall t \neq \lambda \Rightarrow f \equiv 0$

ii) $\sigma(A) = [1,2]$

denn: $\lambda \notin [1,2] \Rightarrow (A - \lambda 1)^{-1}$ ist gegeben

durch $[(A-\lambda 1)^{-1} f](t) = \frac{1}{t-\lambda} f(t)$

$\lambda \in [1,2]$: $(A - \lambda 1)$ nicht surjektiv,

da $[(A-\lambda 1) f(t)] = (t-\lambda) f(t)$

Nullstelle bei $t = \lambda$ hat, also ist

z.B. $g(t) = 1$ $(1 \leq \lambda \leq 2)$ nicht im

ran $(A - \lambda 1)$

Solche Phänomene sind typisch für $A \in B(X)$ mit $\dim X = \infty$; für kompakte Operatoren können sie allerdings nicht auftreten; dort ist alles fast so wie im Endlichdimensionalen. Wir werden zeigen:

<u>10.5. Satz</u>: Sei X ein Banachraum und $T \in \mathcal{K}(X)$. Dann gilt:

i) $\sigma(T)$ ist eine höchstens abzählbare kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$, der einzig mögliche Häufungspkt ist 0.

Ist X unendlichdimensional, so gilt: $0 \in \sigma(T)$ (d.h. T nicht bijektiv)

ii) Jedes $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ist Eigenwert von T und $\dim \ker(T - \lambda 1) < \infty$

iii) Für jedes $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt die Fredholmsche Alternative:

$T - \lambda 1$ surjektiv $\iff$ $T - \lambda 1$ injektiv

d.h. für $\lambda \neq 0$ ist

$$\left.\begin{array}{l}\text{Die inhomogene Gl.}\\ (T-\lambda)x = y\\ \text{hat für jedes } y\\ \text{genau eine Lösung}\end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l}\text{Die homogene Gl.}\\ (T-\lambda)x = 0\\ \text{hat nur die}\\ \text{Lösung } x = 0\end{array}\right.$$

<u>10.6. Bem:</u> Dieser Spektralsatz macht also Aussagen über T selber (für $\lambda = 0$) und über

$$T - \lambda 1 = -\lambda\left(1 - \tfrac{1}{\lambda} T\right)$$

für $\lambda \neq 0$

Da T kompakt $\iff$ $\frac{1}{\lambda} T$ kompakt entspricht $\lambda \neq 0$ also im wesentlichen der Untersuchung von

$A = 1 - T$ wobei T kompakt

Idee: A = kompakte (kleine) Störung von 1, somit sind Eigenschaften von A nahe bei Eig. von 1

10.6 Satz: Sei X Banachraum und $T \in \mathcal{K}(X)$. Setze $A := 1 - T$. Dann gilt

i) $\ker A$ ist endlichdimensional

ii) $\operatorname{ran} A$ ist abgeschlossen in X

iii) $\operatorname{ran} A$ besitzt endliche Kodimension in X

Beweis: i) $\ker A \subset X$ abg. linearer Teilraum, d.h. Banachraum

$$K_1(\ker A) = \{\underbrace{x \in \ker A}_{x = Tx} \mid \|x\| \leq 1\} \subset \overline{T(K_1(X))}$$

$\uparrow$ kompakt

$\Rightarrow K_1(\ker A)$ kompakt

$\overset{7.2}{\Longrightarrow} \ker A$ endlich-dimensional

ii) Sei $y \in \overline{\operatorname{ran} A}$, d.h. $\exists\, y_n = Ax_n$ mit $y_n \to y$

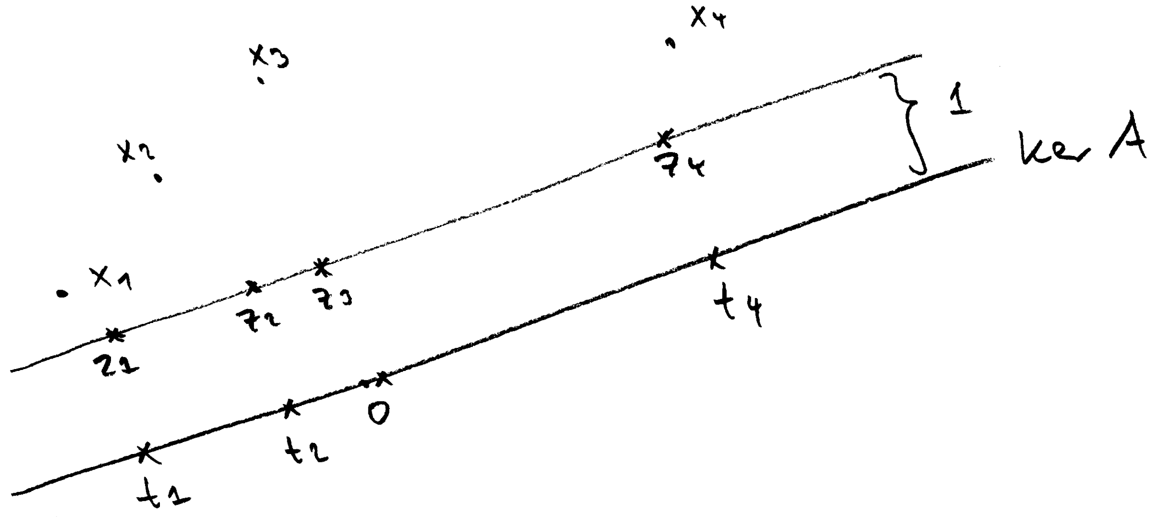
z.z.: $\exists\, x \in X$ mit $y = Ax$

beachte: $Ax_n = A\tilde{x}_n$ falls $x_n - \tilde{x}_n \in \ker A$

wir zeigen: $(\operatorname{dist}(x_n, \ker A))_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt

Annahme: dies gilt nicht, d.h. (event. Übergang zu Teilfolge)

$$\operatorname{dist}(x_n, \ker A) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$



Setze $\quad z_n := \dfrac{x_n}{\operatorname{dist}(x_n, \ker A)}$

$\Rightarrow \operatorname{dist}(z_n, \ker A) = 1$

$\Rightarrow \exists\, t_n \in \ker A : \quad \| z_n - t_n \| \leq 2$

Setze $\quad s_n := z_n - t_n$

$\Rightarrow \|s_n\| \leq 2 \quad$ und $\quad \operatorname{dist}(s_n, \ker A) = \operatorname{dist}(z_n, \ker A) = 1$

$$A s_n = A z_n = \frac{A x_n}{\operatorname{dist}(x_n, \ker A)} \longrightarrow \frac{y}{\infty} = 0$$

Da $(s_n)_n$ beschränkt, T kompakt

$\Rightarrow \exists$ Teilfolge so dass $(T s_{n_j})_j$ konvergiert

also: $\exists\, a \in X : \quad T s_{n_j} \xrightarrow{j\to\infty} a$

$$T s_{n_j} = (1-A) s_{n_j} = s_{n_j} - A s_{j_n}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$a \qquad\qquad\qquad\qquad 0$$

$\Rightarrow s_{n_j} \to a$

$\Rightarrow A a = \lim_{j\to\infty} A s_{n_j} = 0$, dh. $a \in \ker A$

aber: $\operatorname{dist}(a, \ker A) = \lim_{j\to\infty} \operatorname{dist}(s_{n_j}, \ker A) = 1$

Wdsp

somit: $\exists M : \operatorname{dist}(x_n, \ker A) \leq M \quad \forall n$

Sei $t_n \in \ker A$ mit $\|x - t_n\| \leq M+1$

Setze $\tilde{x}_n := x_n - t_n$

$\Rightarrow A\tilde{x}_n = A x_n \to y$ und $\|\tilde{x}_n\| \leq M+1$

T kompakt $\Rightarrow \exists$ konv. TF von $(T\tilde{x}_n)_n$

also $T\tilde{x}_{n_j} \to b \in X$

$$T\tilde{x}_{n_j} = (1-A)\tilde{x}_{n_j} = \tilde{x}_{n_j} - \underbrace{A\tilde{x}_{n_j}}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$b \qquad\qquad\qquad\qquad y$$

$\Rightarrow \tilde{x}_{n_j} \to b+y$

$\Rightarrow A\tilde{x}_{n_j} \to A(b+y)$

$$\begin{array}{c} A\tilde{x}_{n_j} \\ \downarrow \\ y \end{array}$$

$\Rightarrow y = A(b+y)$, d.h. $y \in \operatorname{ran} A$

iii) Sei $\operatorname{kodim} \operatorname{ran} A = \infty$, d.h. $\exists x_i \in X$ $(i \in \mathbb{N})$ mit $x_{n+1} \notin \underbrace{\operatorname{span}(\operatorname{ran} A, x_1, \dots, x_n)}_{=: V_n \subset X \text{ abg. lin. Teilraum}}$

Gemäß 7.1 können x_i so gewählt werden, dass

$\|x_n\| = 1$, $\operatorname{dist}(x_n, V_{n-1}) \geq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \|Tx_n - Tx_m\| = \|x_n \underbrace{- Ax_n - x_m + Ax_m}_{\in V_{n-1} \text{ für } n > m}\|$$

$$\geq \operatorname{dist}(x_n, V_{n-1})$$

$$\geq \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow (Tx_n)_n$ enthält keine konvergente Teilfolge, obwohl $(x_n)_n$ beschränkt

Wdsp zu Kompaktheit von T

$\Rightarrow \operatorname{kodim} \operatorname{ran} A < \infty$ $\square$

10.7. Satz: Sei X Banachraum und $T \in \mathcal{K}(X)$.

Setze $A := 1 - T$. Dann gilt:

i) $(\ker A^n)_{n \geq 1}$ bildet monoton wachsende Folge endlichdim. Teilräume von X und es gilt $n_0 \geq 1$ so dass gilt

$$\ker A^{n_0} = \ker A^{n_0+1} =: N$$

ii) $(\operatorname{ran} A^m)_{m \geq 1}$ bildet monoton fallende Folge abgeschlossener Teilräume endlicher Kodimension und es gilt $m_0 \geq 1$, so dass gilt

$$\operatorname{ran} A^{m_0} = \operatorname{ran} A^{m_0+1} =: R$$

iii) Es gilt: $X = N \oplus R$ und

$A : R \to R$ ist Isomorphismus

Beweis: beachte: $A^n = (1-T)^n = 1 - T_n$

wobei T_n kompakt

Somit gelten Ergebnisse von 10.6. auch für A^n, d.h.

- $\ker A^n$ endlichdim. $\forall n$
- $\operatorname{ran} A^m$ abg. und endl. kodim $\forall m$

i) $A^n x = 0 \Rightarrow A^{n+1} x = A(A^n x) = 0$

$\Rightarrow \ker A^n \subset \ker A^{n+1}$

Ann: $\ker A^n \neq \ker A^{n+1} \quad \forall n$

$\Rightarrow \exists$ Folge (x_n) mit $x_n \in \ker A^n$,

aber $x_n \notin \ker A^{n+1}$

Gemäß 7.1 können x_i so gewählt werden, dass

$\|x_n\| = 1$, $\operatorname{dist}(x_n, \ker A^{n-1}) \geq \frac{1}{2}$

(x_n) beschränkt $\overset{T \text{ komp}}{\Longrightarrow}$ $(Tx_n)_n$ besitzt konverg. TF

aber: $\|Tx_n - Tx_m\| = \|x_n \underbrace{- Ax_n - x_m + Ax_m}_{\in \ker A^{n-1} \text{ für } n > m}\|$

$\geq \operatorname{dist}(x_n, \ker A^{n-1})$

$\geq \frac{1}{2}$

Wdsp

$\Rightarrow \exists n_0 : \ker A^{n_0} = \ker A^{n_0+1} = \ker A^{n_0+2} = \ldots$

ii) analog

iii) Sei $r = \max(n_0, m_0)$, also

$N = \ker A^r$

$R = \operatorname{ran} A^r$

Sei $y \in N \cap R$

d.h. $A^r y = 0$ und $y = A^r x$

$\Rightarrow A^{2r} x = A^r y = 0$

$\Rightarrow x \in \ker A^{2r} = \ker A^r \Rightarrow \underbrace{A^r x}_{= y} = 0$

also: $N \cap R = \{0\}$

noch z.z.: $N + R = X$

Sei $x \in X$

dann: $A^r x \in \operatorname{ran} A^r = \operatorname{ran} A^{2r}$

d.h. $A^r x = A^{2r} z = A^r (\underbrace{A^r z}_{=: y \in \operatorname{ran} A^r = R})$

$\Rightarrow A^r (x - y) = 0$, d.h. $x - y \in \ker A^r = N$

$\Rightarrow x = \underbrace{(x-y)}_{\in N} + \underbrace{y}_{\in R}$

$\Rightarrow X = N \oplus R$

bleibt noch z.z.: $A : R \to R$ ist Isomorphismus

- $A|R$ surjektiv, da

$$A(R) = A(\operatorname{ran} A^\nu) = \operatorname{ran} A^{\nu+1} = \operatorname{ran} A^\nu = R$$

- $A|R$ injektiv, da

$$\ker A|R = \underbrace{\ker A}_{\substack{\subset \ker A^\nu \\ = N}} \cap R \subset N \cap R = \{0\}$$

also $A : R \to R$ bijektiv

$$\left.\begin{array}{l} A \text{ beschränkt} \\ R \text{ Banachraum} \end{array}\right\} \overset{6.5.}{\Rightarrow} A : R \to R \text{ Isomorphismus}$$

□

Beweis von 10.5.: ii) Sei $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$

$$\Rightarrow T - \lambda 1 = -\lambda \underbrace{(1 - \underbrace{\tfrac{1}{\lambda} T}_{\text{kompakt}})}_{=: A_\lambda}$$

$\overset{10.7.}{\Rightarrow}$ $X = N_\lambda \oplus R_\lambda$ wobei

$A_\lambda : R_\lambda \to R_\lambda$ Isomorphismus

und

$N_\lambda = \ker A_\lambda^{n_0}$ mit

$$\ker A_\lambda^{n_0 - 1} \underset{\substack{\neq \\ \uparrow \\ \text{falls } n_0 \geq 1}}{\subset} \ker A_\lambda^{n_0} = \ker A_\lambda^{n_0+1}$$

also $A_\lambda^{n_0} | N_\lambda = 0$

$\lambda \in \sigma(T) \Rightarrow N_\lambda \neq \{0\}$ (und somit $n_0 \geq 1$)

(da sonst A_λ auf $R_\lambda = X$ Isomorph.)

$\Rightarrow \exists\, 0 \neq x \in \ker A_\lambda^{n_0} \setminus \ker A_\lambda^{n_0 - 1}$

also: $y := A_\lambda^{n_0-1} x \neq 0$ und $A_\lambda y = A_\lambda^{n_0} x = 0$

$\Rightarrow \ker A_\lambda \neq \{0\}$

$\ker A_\lambda = \ker(T - \lambda 1)$

$\Rightarrow \lambda \in \sigma_p(T)$

außerdem: $\ker(T - \lambda 1) = \ker A_\lambda$

$\subset \ker A_\lambda^{n_0} = N_\lambda$

und $\dim N_\lambda < \infty$ (nach 10.7)

$\Rightarrow \dim \ker(T - \lambda 1) < \infty$

iii) Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$T - \lambda 1$ injektiv $\Rightarrow \lambda \notin \sigma_p(T)$

$\overset{ii)}{\Rightarrow} \lambda \notin \sigma(T)$

$\Rightarrow T - \lambda 1$ bijektiv, also

insbesondere surjektiv

$T - \lambda 1$ surjektiv $\Rightarrow A_\lambda = 1 - \frac{1}{\lambda} T$ surjektiv

$\Rightarrow A_\lambda^m$ surjektiv $\quad \forall m = 1, 2, \ldots$

$\Rightarrow R = \operatorname{ran} A_\lambda^{m_0} = X$

also: $A_\lambda : \underset{X}{\underset{\shortparallel}{R}} \to \underset{X}{\underset{\shortparallel}{R}}$ Isomorphismus

insbesondere also injektiv

$\Rightarrow T - \lambda 1$ injektiv

i) Wir werden zeigen

(*) jedes $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ist isoliert in $\sigma(T)$,

d.h. $\exists \varepsilon > 0 : \mathcal{U}_\varepsilon(\lambda) \cap \sigma(T) = \{\lambda\}$

Sei (*) gezeigt; dann ist 0 der einzig mögliche Häufungspkt von $\sigma(T)$ und $\sigma(T)$ ist höchstens abzählbar

Es gilt: $\lambda \in \sigma_p(T) \Rightarrow |\lambda| \leq \|T\|$

$\Rightarrow \sigma(T) \subset \{\lambda \mid |\lambda| \leq \|T\|\}$ also $\sigma(T)$ beschränkt

Sei $0 \notin \sigma(T)$, d.h. T bijektiv

$\overset{6.4.}{\Longrightarrow} T^{-1} \in B(X)$

$\Rightarrow \mathbb{1} = T \cdot T^{-1} \in \mathcal{K}(X)$, da $\mathcal{K}(X)$ Ideal

$\Rightarrow X$ endlichdimensional

$\sigma(T)$ kompakt: klar falls $\dim X < \infty$

sei $\dim X = \infty$: dann ist $\sigma(T)$ abgeschl.

(da $0 \in \sigma(T)$ und 0 einzig mögl. Häufungspkt),

und beschränkt, also kompakt

Beweis von $(*)$: Sei $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$

z.z.: $\exists \varepsilon > 0 \ \forall 0 < |\mu| < \varepsilon$: $T - (\lambda + \mu)\mathbb{1}$ ist invertierbar

Es gilt: $T - (\lambda+\mu)\mathbb{1} = \underbrace{(T - \lambda \mathbb{1})}_{\text{Struktur bekannt}} - \mu \mathbb{1}$

$X = N_\lambda \oplus R_\lambda$ mit

$T - \lambda \mathbb{1} : R_\lambda \to R_\lambda$ Isomorphismus

und

$\exists n \geq 1 : (T - \lambda \mathbb{1})^n = 0$ auf N_λ

beachte: es gilt dann auch

$(T - \lambda\mathbb{1}) - \mu \mathbb{1} : R_\lambda \to R_\lambda$

$N_\lambda \to N_\lambda$

und es reicht z. z.:

$(T-(\lambda+\mu)1)|_{R_\lambda}$ und $(T-(\lambda+\mu)1)|_{N_\lambda}$

sind invertierbar.

Das folgt aus folgendem Satz. $\square$

<u>10.8. Satz:</u> Sei X Banachraum und $A \in B(X)$.

1) Falls A nilpotent (d.h. $\exists n : A^n = 0$),

so ist $\sigma(A) = \{0\}$

(d.h. $A - \mu 1$ invertierbar $\forall \mu \neq 0$)

2) $\sigma(A)$ ist abgeschlossen, d.h. $\rho(A)$

ist offen, also:

$\lambda \in \rho(A) \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \; \forall |\mu| < \varepsilon : \lambda + \mu \in \rho(A)$

<u>Beweis:</u> Beachte: $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ falls dies Sinn macht

1) $(A-\mu 1)^{-1} = -\mu^{-1}(1-\mu^{-1}A)^{-1}$

$= -\mu^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\mu^k}\right)$

$= -\mu^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A^k}{\mu^k}$ ist Inverses

$\Rightarrow (A-\mu 1)^{-1}$ existiert für $\mu \neq 0$ $\Rightarrow \sigma(A) = \{0\}$

2) $\lambda \in \varrho(A) \Rightarrow (A - \lambda 1)^{-1}$ existiert

$$A - (\lambda + \mu) 1 = (A - \lambda 1)[1 - \mu (A - \lambda 1)^{-1}]$$

$$\Rightarrow [A - (\lambda + \mu) 1]^{-1} = [\dots]^{-1} (A - \lambda 1)^{-1}$$

falls $[\dots]^{-1}$ existiert

Sei $B := (A - \lambda 1)^{-1}$

$$\Rightarrow (1 - \mu B)^{-1} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (\mu B)^n}$$

konvergiert, falls $|\mu| \cdot \|B\| < 1$

d.h. $|\mu| < \frac{1}{\|B\|}$

also: für $|\mu| < \frac{1}{\|(A - \lambda 1)^{-1}\|}$

existiert $(A - (\lambda + \mu) \cdot 1)^{-1}$ und somit ist

$\lambda + \mu \in \varrho(A)$ $\square$