11. Banachalgebren

ab sofort gilt Voraussetzung: $\mathbb{F} = \mathbb{C}$

11.1. Def.: 1) Eine *Algebra* ist ein Vektorraum A mit Multiplikation $\cdot : A \times A \to A$, so daß $(A, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement e ist und

$$\lambda(ab) = (\lambda a)b = a(\lambda b) \qquad \forall\, a, b \in A,\ \lambda \in \mathbb{C}.$$

gilt $ab = ba \quad \forall\, a, b \in A$, so heißt A *kommutativ*.

2) Eine *normierte Algebra* ist eine Algebra A, versehen mit einer Norm $\|\cdot\|$, so daß gilt

i) $\|ab\| \leq \|a\|\,\|b\| \qquad \forall\, a, b \in A$

ii) $\|e\| = 1$

3) Eine *Banachalgebra* ist eine normierte Algebra, welche vollständig ist.

4) Eine C^*-Algebra ist eine Banachalgebra zusammen mit einer Abbildung $* : A \to A$ so daß gilt:

i) $*$ ist Involution, d.h. $(a, b \in A,\ \lambda \in \mathbb{C})$

$$(a+b)^* = a^* + b^*$$

$$(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$$

$$(ab)^* = b^* a^*$$

$$(a^*)^* = a$$

ii) $\|a^* a\| = \|a\|^2 \qquad \forall\, a \in A$

5) Seien A_1, A_2 zwei Banachalgebren und $\varphi: A_1 \to A_2$ eine lineare Abbildung. Ist φ multiplikativ, d.h.

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) \quad \forall\, a,b \in A_1,$$

so heißt φ (Algebren-) <u>Homomorphismus</u>.

Ist φ bijektiv, so heißt es (Algebren-) <u>Isomorphismus</u>.

Gilt weiterhin

$$\|\varphi(a)\| = \|a\| \quad \forall\, a \in A_1,$$

so heißt φ <u>isometrischer Isomorphismus</u>.

6) Seien A_1, A_2 zwei C^*-Algebren und $\varphi: A_1 \to A_2$ ein Homomorphismus. Gilt

$$\varphi(a^*) = \varphi(a)^* \quad \forall\, a \in A_1,$$

so heißt φ $*$-Homomorphismus.

11.2. Bem: Man kann auch Banachalgebren ohne Eins betrachten. Eine solche kann aber immer in eine Banachalgebra mit Eins eingebettet werden.
(Übungsaufgabe)

11.3. Beispiele: 1) Sei $K \neq \emptyset$ kompakter top. Raum.

$\mathcal{C}(K) := \{ f : K \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig} \}$ Banachalgebra mit:

$$\|f\| = \sup_{t \in K} |f(t)|$$

$$(f+g)(t) := f(t) + g(t)$$
$$(\lambda \cdot f)(t) := \lambda f(t) \qquad f, g \in \mathcal{C}(K), \lambda \in \mathbb{C}$$
$$(f g)(t) := f(t) \cdot g(t)$$

$\mathcal{C}(K)$ wird C^*-Algebra mit

$$f^*(t) := \overline{f(t)}$$

$\mathcal{C}(K)$ ist kommutativ

Ziel: komm. BA $\cong$ Unteralgebra von $\mathcal{C}(K)$

komm C^*-Alg. $\cong$ $\mathcal{C}(K)$

mit geeignetem K

($\mathcal{C}(K) \longleftrightarrow K$ Topologie

d.h. komm. C^*-Algebren $\hat{=}$ Topologie

$\rightsquigarrow$ C^*-Algebren $\hat{=}$ nicht-komm. Topologie)

2) Sei X Banachraum, dann ist $B(X)$ Banachalgebra (nicht-kommutativ, falls $\dim X > 1$)

es gilt: BA $\cong$ Unteralgebra von $B(X)$ für geeignetes X

(Übung!)

3) Sei $\mathcal{H}$ Hilbertraum, dann ist $B(\mathcal{H})$ C^*-Algebra.

es gilt: C^*-Algebra $\cong$ Unteralgebra von $B(\mathcal{H})$ für geeignetes $\mathcal{H}$

(Satz von Gelfand-Naimark $\rightsquigarrow$ nächstes Semester)

<u>11.4 Lemma</u>: 1) Sei A eine normierte Algebra. Dann ist die Multiplikation stetig.

2) Sei A eine C^*-Algebra. Dann gilt

i) $\|a^*\| = \|a\| \quad \forall\, a \in A$

ii) $e^* = e$

<u>Beweis</u>: 1) $\|ab - cd\| = \|a(b-d) + (a-c)d\|$

$$\leq \|a\|\,\|b-d\| + \|a-c\|\,\|d\|$$

also: $\left.\begin{array}{l} a_n \to a \\ b_n \to b \end{array}\right\} \Rightarrow a_n b_n \to ab$

2) i) $\|a\|^2 = \|aa^*\| \leq \|a\| \, \|a^*\|$

$$\Rightarrow \|a\| \leq \|a^*\| \qquad (\text{o. E. } a \neq 0)$$

$$\overset{a \rightsquigarrow a^*}{\Rightarrow} \|a^*\| \leq \|a^{**}\| = \|a\|$$

$$\Rightarrow \|a\| = \|a^*\|$$

ii) $e^* = e e^* = (e^*)^* e^* = (e e^*)^* = e^{**} = e$ $\square$

11.5. Def.: Sei A eine Banachalgebra.

1) $a \in A$ heißt <u>invertierbar</u>, falls es ein $b \in A$ gibt mit $ab = ba = e$.

Notation: $b = a^{-1}$ (eindeutig bestimmt!)

$\mathcal{G}_A := \{ a \in A \mid a \text{ ist invertierbar} \}$

<u>Gruppe der invertierbaren Elemente</u>

$(x, y \in \mathcal{G}_A \Rightarrow (xy)^{-1} = y^{-1} x^{-1} \Rightarrow xy \in \mathcal{G}_A)$

2) $\varrho(a) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda e - a \text{ invertierbar} \}$

heißt <u>Resolventenmenge</u> von a.

Die Funktion

$R(\cdot, a) : \varrho(a) \to A, \quad R(\lambda, a) := (\lambda e - a)^{-1} \quad (= R(\lambda))$

heißt <u>Resolvente</u> von a. (bei Physikern $\hat{=}$ Greensfunktion $G(z)$)

Das Komplement von $\varrho(a)$,

$\sigma(a) := \mathbb{C} \setminus \varrho(a) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda e - a \text{ nicht invertierbar} \}$

heißt <u>Spektrum</u> von a.

11.6. Lemma: Sei A Banachalgebra und $x \in A$ mit $\|x\| < 1$. Dann ist $e-x$ invertierbar und es gilt:

$$\|(e-x)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|x\|}$$

$$\|e-(e-x)^{-1}\| \leq \frac{\|x\|}{1-\|x\|}$$

Beweis: $y := \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=0}^{k} x^n \in A$, da

$$\left\| \sum_{n=0}^{k} x^n - \sum_{n=0}^{\ell} x^n \right\| = \left\| \sum_{n=\ell+1}^{k} x^n \right\| \leq \sum_{n=\ell+1}^{k} \|x\|^n \xrightarrow[\ell\to\infty]{} 0$$

$(k > \ell)$

$y = (e-x)^{-1}$, da

$$\Big(\sum_{n=0}^{k} x^n\Big)(e-x) = (e-x)\Big(\sum_{n=0}^{k} x^n\Big) = e - x^{k+1}$$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & & \downarrow & \downarrow & k\to\infty \\ y & & y & 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow y(e-x) = (e-x)y = e \quad \Rightarrow y = (e-x)^{-1}$

$$\|y\| = \left\|\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|x\|^n = \frac{1}{1-\|x\|}$$

$$e - y = -\sum_{n=1}^{\infty} x^n \Rightarrow \|e-y\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x\|^n = \frac{\|x\|}{1-\|x\|}$$

$\square$

11.7. Satz: Sei A Banachalgebra. Dann ist die Gruppe $\mathcal{G}_A$ der invertierbaren Elemente offen, und die Inversion $x \mapsto x^{-1}$ ist stetig auf $\mathcal{G}_A$.

Beweis: Sei $a \in \mathcal{G}_A$.

z.z: für $b \in A$ mit $\|b-a\|$ hinr. klein gilt: $b \in \mathcal{G}_A$

Sei $\|b-a\| < \frac{1}{\|a^{-1}\|}$

$$\Rightarrow b = a - (a-b) = \underbrace{(e - (a-b)a^{-1})}_{\substack{\text{invertierbar, da} \\ \|(a-b)a^{-1}\| \leq \|a-b\|\|a^{-1}\| < 1}} a \qquad \text{(vgl. 10.8)}$$

$$\Rightarrow b^{-1} = a^{-1} \cdot (e - (a-b)a^{-1})^{-1} \qquad \Rightarrow b \in \mathcal{G}_A$$

Sei nun $x_n, x \in \mathcal{G}_A$ mit $x_n \to x$, z.z. $x_n^{-1} \to x^{-1}$

zunächst: $x = e$, also $x_n \to e$, z.z. $x_n^{-1} \to e^{-1} = e$

$$x_n^{-1} = (e - (e - x_n))^{-1}$$

$$\overset{11.6}{\Rightarrow} \|e - x_n^{-1}\| = \|e - (e - (e - x_n))^{-1}\|$$

$$\leq \frac{\|e - x_n\|}{1 - \|e - x_n\|} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

d.h. $x_n^{-1} \to e$

nun allgemein: $x_n \to x \Rightarrow x^{-1}x_n \to e$

$$\Rightarrow \underset{x_n^{-1}x}{\overset{\|}{(x^{-1}x_n)^{-1}}} \to e \qquad \Rightarrow x_n^{-1} \to x^{-1}$$

$\square$

11.8. Lemma: Sei A Banachalgebra, $a \in A$, und $\lambda, \mu \in \varrho(a)$. Dann gilt:

i) $R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda) R(\lambda) R(\mu)$, d.h.

$$\frac{1}{\lambda - a} - \frac{1}{\mu - a} = (\mu - \lambda) \cdot \frac{1}{\lambda - a} \frac{1}{\mu - a}$$

(Resolventengleichung)

ii) $\lim\limits_{\mu \to \lambda} \frac{1}{\lambda - \mu} (R(\lambda) - R(\mu)) = -R(\lambda)^2$

Beweis: i) $R(\lambda) = R(\lambda)(\mu - a) R(\mu)$

$$= R(\lambda)(\lambda - a + (\mu - \lambda)) R(\mu)$$

$$= R(\mu) + R(\lambda)(\mu - \lambda) R(\mu)$$

ii) $\frac{1}{\lambda - \mu}(R(\lambda) - R(\mu)) \overset{i)}{=} -R(\lambda)R(\mu) \xrightarrow{\mu \to \lambda} -R(\lambda)^2$ $\square$

11.9. Satz: Sei A Banachalgebra und $a \in A$. Dann ist $\sigma(a)$ kompakt und nichtleer. Insbesondere gilt:

$\sigma(a) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|a\|\}$

11.10. Bem.: 1) Die wesentl. Aussage ist: $\sigma(a) \neq \emptyset$.

Dies gilt nicht falls $\mathbb{F} = \mathbb{R}$,

z.B. $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$ hat in $\mathbb{R}$ keine Eigenwerte,

$\sigma(a) = \{+i, -i\}$

2) $\dim A < \infty$: $\sigma(a) \neq \emptyset \ \forall a$ heißt dann:

Jede Matrix T hat mindestens einen (komplexen) Eigenwert, d.h. die Gleichung $\det(\lambda I - T) = 0$ besitzt mindestens eine Lösung.

Das ist der Fundamentalsatz der Algebra.

<u>Beweis</u>: 11.7 $\Rightarrow \begin{cases} (\lambda - a) \text{ invertierbar} \\ \Rightarrow (\mu - a) \text{ invertierbar, für } |\lambda - \mu| \\ \text{hinr. klein} \end{cases}$

d.h. $\varrho(a)$ offen

$\Rightarrow \sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \varrho(a)$ abgeschlossen

Sei $|\lambda| > \|a\|$

$$\Rightarrow (\lambda e - a)^{-1} = \frac{1}{\lambda} \underbrace{\left(e - \frac{a}{\lambda}\right)^{-1}}$$

existiert nach 11.6. da

$$\left\|\frac{a}{\lambda}\right\| = \frac{\|a\|}{|\lambda|} < 1$$

$\Rightarrow \sigma(a) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|a\|\}$

$\Rightarrow \sigma(a)$ beschränkt

$\Rightarrow \sigma(a)$ kompakt

noch z.z.: $\sigma(a) \neq \emptyset$

Sei $\sigma(a) = \emptyset$, d.h. $\varrho(a) = \mathbb{C}$

$\Rightarrow z \mapsto R(z) = \dfrac{1}{z - a}$ auf ganz $\mathbb{C}$ definiert

(holomorph nach 11.8 ii), $\lim\limits_{z \to \infty} R(z) = 0 \overset{!?}{\Rightarrow} R(z) = 0$)

insbesondere: $0 \in \varrho(a)$, d.h. a^{-1} existiert und $a^{-1} \neq 0$

$\overset{\text{Hahn-Banach}}{\Longrightarrow} \quad \exists L \in A^* \quad \text{mit} \quad L(a^{-1}) \neq 0$

Definiere nun

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) := L(R(z)) = L\left(\frac{1}{z-a}\right)$$

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

$$= L\left(\lim_{\Delta z \to 0} \frac{R(z+\Delta z) - R(z)}{\Delta z}\right)$$

$$= L(-R(z)^2)$$

d.h. $f'(z)$ existiert für alle $z \in \mathbb{C}$, d.h. f holomorph auf $\mathbb{C}$

und: $\lim_{z \to \infty} f(z) = 0$, da für $|z| > \|a\|$

$$\|R(z)\| = \left\|\frac{1}{z-a}\right\| = \frac{1}{|z|}\left\|\frac{1}{e - a/|z|}\right\| \overset{11.6}{\leq} \frac{1}{|z|}\,\frac{1}{1 - \frac{\|a\|}{|z|}} = \frac{1}{|z| - \|a\|}$$

$$\underset{z \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{z \to \infty} \underbrace{L(R(z))}_{f(z)} = 0 \qquad \text{da } L \text{ beschränkt}$$

also insbesondere: f beschränkt und $f(\infty) = 0$

$\overset{\text{Satz von Liouville}}{\Longrightarrow} \quad f \equiv 0$

aber $\quad f(0) = L(R(0)) = L(a^{-1}) \neq 0 \qquad$ Widsp

$\Longrightarrow \sigma(a) \neq \emptyset$ $\qquad \square$

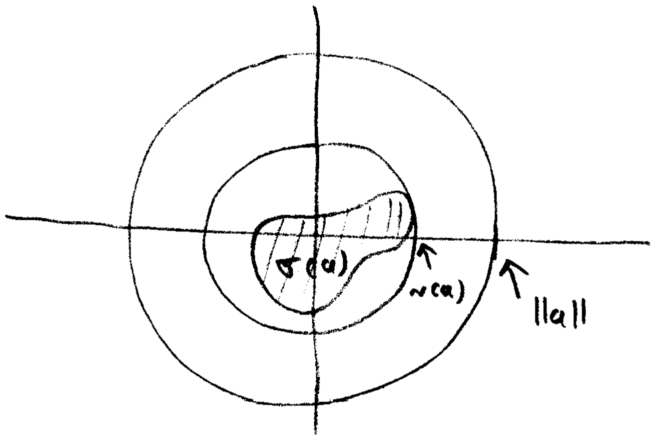
11.10. Korollar (Satz von Gelfand-Mazur): Sei A eine Banachalgebra, in der jedes Element $a \neq 0$ invertierbar ist. Dann ist $A \cong \mathbb{C}$.

Beweis: $a \in A \overset{11.9}{\Rightarrow} \sigma(a) \neq 0$, d.h. $\exists \lambda \in \sigma(a)$: $(\lambda e - a)$ nicht invertierbar

$\Rightarrow \lambda e - a = 0$

$\Rightarrow \lambda e = a$ $\square$

11.11. Bemerkung: Dies bedeutet also, daß man die Quaternionen nicht mit einer Norm versehen kann, so daß es eine Banachalgebra wird.



11.12. Def.: Sei A Banachalgebra und $a \in A$. Dann heißt

$r(a) := \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(a)\}$

<u>Spektralradius</u> von a.

11.13. Satz (Spektralradiusformel): 1) Sei A Banachalgebra und $a \in A$. Dann gilt:

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n}$$

2) Ist A C^*-Algebra und $a \in A$ normal (d.h. $aa^* = a^*a$), dann gilt:

$$r(a) = \|a\|$$

11.14 Bem.: 1) Beachte: $r(a)$ ist rein algebraisch definiert, während rechte Seite der Gleichung von Norm (also Topologie) abhängt.

2) Im allgemeinen gilt $r(a) < \|a\|$

z.B. $a \neq 0$ mit $\sigma(a) = \{0\} \Rightarrow r(a) = 0$, aber $\|a\| \neq 0$

(z.B. a = Volterra-Operator oder $a = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$)

Beweis: 1) Es gilt: $\lambda \in \sigma(a) \Rightarrow \lambda^n \in \sigma(a^n)$, denn

$$\lambda^n - a^n = (\lambda - a)(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}a + \dots + \lambda a^{n-2} + a^{n-1})$$

also $\lambda^n - a^n$ invertierbar $\Rightarrow \lambda - a$ invertierbar mit

$$(\lambda - a)^{-1} = (\lambda^{n-1} + \dots + a^{n-1})(\lambda^n - a^n)^{-1}$$

somit: $\lambda \in \sigma(a) \Rightarrow \lambda^n \in \sigma(a^n) \overset{11.9.}{\Rightarrow} |\lambda|^n \leq \|a^n\| \quad \forall n$

$$\Rightarrow |\lambda| \leq \liminf \|a^n\|^{1/n} \qquad \forall \lambda \in \sigma(a)$$

$$\Rightarrow r(a) \leq \liminf \|a^n\|^{1/n}$$

noch z.z.: $r(a) \geq \limsup \|a^n\|^{1/n}$

Idee: $R(z) = \frac{1}{z-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{z^{n+1}}$ falls $\|a\| < |z|$

Potenzreihenentwicklung von $R(z)$, gültig für alle Kreise, wo $R(z)$ holomorph, d.h. für $|z| > r(a)$

klassischer Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum \frac{\alpha_n}{z^{n+1}}$ ist $\limsup |\alpha_n|^{1/n} \mathrel{\hat{=}} \limsup \|a^n\|^{1/n}$

Problem: $R(z)$ nicht $\mathbb{C}$-wertig, sondern A-wertig

$\rightsquigarrow$ führe alles auf $\mathbb{C}$-wertigen Fall durch Anwendung linearer Flt zurück

Sei $L \in A^*$, setze $f(z) := L(R(z)) = L\left(\frac{1}{z-a}\right)$

$\Rightarrow f : \varrho(a) \to \mathbb{C}$ holomorph und

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L(a^n)}{z^{n+1}} \quad \text{für } |z| > \|a\|$$

$\Rightarrow$ diese Reihenentwicklung gilt auch für alle $|z| > r(a)$

d.h. $\limsup |L(a^n)|^{1/n} \leq r(a)$

Sei nun $r > r(a)$

$\Rightarrow |L(a^n)|^{1/n} \leq r$ für n hinr. groß

d.h. $\frac{|L(a^n)|}{r^n} \leq 1$ für n hinr. groß

$$\Rightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|L(a^n)|}{r^n} < \infty \quad \forall L \in A^*$$

$\overset{\text{Satz von der glm. Beschr. 6.6}}{\Longrightarrow} \quad \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \frac{a^n}{r^n} \right\| < \infty$

$$\Big(\sup_{x \in \mathcal{M}} |L(x)| < \infty \quad \forall L \in A^* \Rightarrow \sup_{x \in \mathcal{M}} \|x\| < \infty$$

$$\qquad \shortparallel \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$$

$$\sup_{\hat{x} \in \hat{\mathcal{M}}} |\hat{x}(L)| < \infty \quad \forall L \in A^* \Rightarrow \sup_{\hat{x} \in \hat{\mathcal{M}}} \|\hat{x}\| < \infty \Big)$$

also: $\exists C : \left\| \frac{a^n}{r^n} \right\| \le C \quad \forall n$

d.h. $\|a^n\| \le C r^n$

$$\|a^n\|^{1/n} \le C^{1/n} r \xrightarrow{n \to \infty} r$$

$$\Rightarrow \limsup \|a^n\|^{1/n} \le r \qquad \forall r > r(a)$$

$$\Rightarrow \limsup \|a^n\|^{1/n} \le r(a)$$

$$\Rightarrow r(a) = \lim \|a^n\|^{1/n}$$

2) Sei A C^*-Algebra, $aa^* = a^*a$

$$\Rightarrow \|a^2\|^2 = \|(a^2)^* a^2\| = \|a^* \underbrace{a^* a}_{aa^*} a\| = \|(a^*a)^*(a^*a)\|$$

$$= \|a^*a\|^2$$

$$= \|a\|^4$$

$$\Rightarrow \|a^2\| = \|a\|^2$$

$\overset{\text{Induktion}}{\Longrightarrow} \quad \| a^{2^n} \| = \|a\|^{2^n}$ (beachte: a normal $\Rightarrow$ a^k normal)

also: $$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \| a^{2^n} \|^{1/2^n} = \|a\|$$

□

Betrachte $a \in B \subset A$ $\quad A, B$ Banachalgebren

i.a. wird $\sigma(a)$ von Algebra abhängen, d.h. $\sigma_A(a) \subset \sigma_B(a)$

<u>11.15. Beispiel</u>: Sei $D := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \}$

und $T := \partial D = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$

Setze $A := C(T)$

$$B := \overline{\{ p : T \to \mathbb{C} \mid p \text{ Polynom in } z \}}^{\|\cdot\|}$$

beachte: $B \subsetneq A = \overline{\{ p : T \to \mathbb{C} \mid p \text{ Polynom in } z \text{ und } \bar{z} \}}^{\|\cdot\|}$

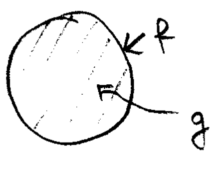
$\uparrow$ Stone-Weierstraß

Betrachte nun $p \in B \subset A$ mit $p(z) = z$

$\Rightarrow \sigma_A(p) = T = \partial D$

$\sigma_B(p) = \; ?$

beachte: $f \in B \overset{\text{Funktionentheorie}}{\Longrightarrow}$ f kann zu holomorpher (also stetiger) Fkt g auf $\mathring{D}$ fortgesetzt werden, so daß $g|\partial D = f$



Sei nun $\lambda \notin \sigma_B(p) \Rightarrow \exists f \in B: (\lambda - z) f(z) = 1$ auf T

setzt sich auf's Innere fort

$\Rightarrow \exists g \in C(D) \quad (g|\partial D = f):$

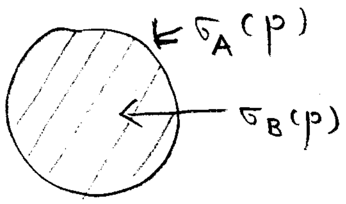
$$(\lambda - z)\, g(z) = 1 \qquad \forall z \in D$$

$\Rightarrow \lambda \neq z \qquad \forall z \in D$

Da $\sigma_B(p) \subset \{ z \mid |z| \leq \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{\|p\|} \} = D$

$\Rightarrow \sigma_B(p) = D$

also:



<u>11.16. Satz:</u> Seien A, B Banachalgebren mit $B \subset A$ und sei $a \in B$. Dann gilt

i) $\sigma_A(a) \subset \sigma_B(a)$

ii) $\partial \sigma_B(a) \subset \partial \sigma_A(a)$

<u>Beweis:</u> i) $\lambda \notin \sigma_B(a) \Rightarrow \exists (\lambda - a)^{-1} \in B \subset A \Rightarrow \lambda \notin \sigma_A(a)$

ii) Sei $\lambda \in \partial \sigma_B(a)$, z.z. $\lambda \in \partial \sigma_A(a) = \sigma_A(a) \setminus \mathring{\sigma}_A(a)$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Da } \mathring{\sigma}_A(a) \subset \mathring{\sigma}_B(a) \\ \lambda \notin \mathring{\sigma}_B(a) \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda \notin \mathring{\sigma}_A(a)$$

also nach z.z.: $\lambda \in \sigma_A(a)$

Gelte $\lambda \notin \sigma_A(a)$, d.h. $\exists\, x \in A$ mit

$x(\lambda - a) = (\lambda - a)x = e$

$\lambda \in \partial\sigma_B(a) \Rightarrow \exists\, \lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \sigma_B(a)$ mit $\lambda_n \to \lambda$

d.h. $(\lambda_n - a)^{-1} \in B \subset A$

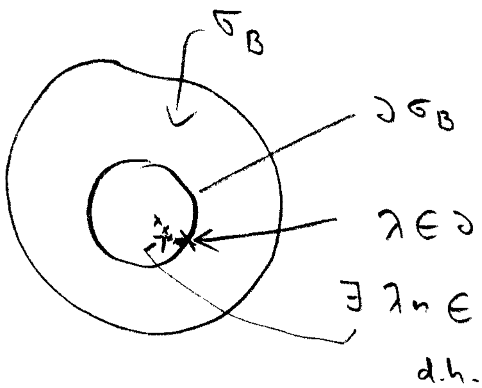
$\lambda_n \to \lambda \Rightarrow \lambda_n - a \to \lambda - a \overset{(\cdot)^{-1} \text{ stetig}}{\Longrightarrow} \underbrace{(\lambda_n - a)^{-1}}_{\in B} \to (\lambda - a)^{-1} = x$

Da B vollständig $\Rightarrow x \in B$

$x = (\lambda - a)^{-1}$

$\Rightarrow \lambda \notin \sigma_B(a)$ Wdsp

also $\lambda \in \sigma_A(x)$ □



$\lambda \in \partial\sigma_B$, aber $\lambda \notin \sigma_A$

$\exists\, \lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \sigma_B$

$\Downarrow$

d.h.

$(\lambda_n - a)^{-1} \in B \xrightarrow{n \to \infty} (\lambda - a)^{-1} \in A$

11.17. Satz: Sei A eine kommutative C^*-Algebra und a selbstadjungiert (d.h. $a^* = a$). Dann gilt: $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$.

Beweis: später

11.18. Satz: Seien A und B C^*-Algebren mit $B \subset A$ und sei $a \in B$. Dann gilt $\sigma_A(a) = \sigma_B(a)$.

11.19. Bem.: Sei $a = a^* \in A$.

$B := C^*(a,e) = \overline{\{\alpha_0 e + \alpha_1 a + \dots + \alpha_n a^n \mid n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{C}\}} \subset A$

die von e und a erzeugte C^*-Algebra.

$\Rightarrow$ B kommutativ, also

$$\sigma_A(a) \underset{11.18}{=} \sigma_B(a) \underset{11.17}{\subset} \mathbb{R}$$

d.h. 11.17 gilt dann auch für beliebige C^*-Algebren.

Beweis (11.18): Sei $a = a^* \in B$

$C := C^*(a,e)$ kommutativ und $C \subset B \subset A$

Wir zeigen $\sigma_A(a) = \sigma_C(a) = \sigma_B(a)$

$$C \subset B \overset{11.16}{\Longrightarrow} \sigma_B(a) \subset \sigma_C(a) \underset{(11.17)}{=} \partial\sigma_C(a) \subset \partial\sigma_B(a) \subset \sigma_B(a)$$

da $\sigma_C(a) \subset \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \sigma_B(a) = \sigma_C(a) \\ \text{analog} \quad \sigma_A(a) = \sigma_C(a) \end{array}\right\} \Rightarrow \sigma_A(a) = \sigma_B(a)$$

Sei nun $a \in B$ beliebig.

Es reicht $\underset{(\text{„}\subseteq\text{“ klar})}{2.2.}$: a invertierbar in A $\Rightarrow$ a invertierbar in B

Sei a invertierbar in A, d.h. $\exists b \in A: ab = ba = e$

$\Rightarrow b^* a^* = a^* b^* = e^* = e$

$\Rightarrow (a^*a)(bb^*) = (bb^*)(a^*a) = e$

d.h. a^*a ist invertierbar in A

$(a^*a)^* = a^*a$ selbstadj. $\overset{\text{oben}}{\Rightarrow}$ a^*a auch invertierbar in B

und $bb^* = (a^*a)^{-1} \in B$

$\Rightarrow b = b(b^*a^*) = (bb^*)a^* \in B$

also $a^{-1} = b \in B$ $\square$