12. kommutative Banachalgebren

12.1 Def.: Sei A eine Banachalgebra. Ein Homomorphismus $0 \neq \varphi : A \to \mathbb{C}$ heißt **komplexer Homomorphismus** (oder **Charakter**)
(also: φ linear, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ $\forall x, y \in A$, $\varphi \neq 0$) $\Sigma(A) :=$ Menge dieser

12.2 Satz: Sei A eine Banachalgebra und $\varphi : A \to \mathbb{C}$ sei komplexer Homomorphismus. Dann gilt:

i) $\varphi(e) = 1$

ii) $\varphi(x) \neq 0$ $\quad \forall x \in A$, x invertierbar

iii) $\|\varphi\| = 1$, insbesondere $\varphi \in A^*$

Beweis: i) Sei $y \in A$ mit $\varphi(y) \neq 0$

$\Rightarrow \varphi(y) = \varphi(ye) = \varphi(y)\varphi(e)$

$\Rightarrow \varphi(e) = 1$

ii) Sei $x \in A$ invertierbar

$\Rightarrow \varphi(x)\varphi(x^{-1}) = \varphi(xx^{-1}) = \varphi(e) = 1$

$\Rightarrow \varphi(x) \neq 0$

iii) Sei $x \in A$, z.z.: $|\varphi(x)| \leq \|x\|$

Setze $\lambda = \varphi(x)$

$\Rightarrow \varphi(\lambda e - x) = \lambda \cdot 1 - \varphi(x) = 0$

$\overset{ii)}{\Rightarrow} \lambda e - x$ nicht invertierbar

d.h. $\lambda \in \sigma(x) \subset \{\lambda \mid |\lambda| \leq \|x\|\}$

$\Rightarrow |\varphi(x)| = |\lambda| \leq \|x\|$ $\quad \Rightarrow \|\varphi\| \leq 1$

da $\varphi(e) = 1$ $\quad \Rightarrow \|\varphi\| = 1$ $\quad \square$

12.3 Bem: 1) In beliebigen Banachalgebren gibt es i.a. nicht sehr viele komplexe Homomorphismen, da sie wegen

$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(y)\varphi(x) = \varphi(yx)$

die Nicht-Kommutativität nicht sehen.

In kommutativen Banachalgebren bestimmen die komplexen Homomorphismen einen großen Teil der Struktur.

2) Die wesentliche Information über φ ist in ihrem Kern enthalten. Diese sind nämlich maximale Ideale.

12.4. Def.: Sei A eine Banachalgebra.

1) Ein Ideal J in A ist ein linearer Teilraum von A mit $\emptyset \neq J \neq A$, für den gilt

$$ax, xa \in J \quad \forall a \in A, x \in J$$

2) Ein maximales Ideal J in A ist ein Ideal welches in keinem echt größeren Ideal enthalten ist.

12.5. Satz: Sei A eine Banachalgebra

1) Sei J ein Ideal in A. Dann gilt:

i) J enthält keine invertierbaren Elemente von A.

ii) $\operatorname{dist}(e, J) = 1$

iii) $\overline{J}$ ist ein Ideal in A

iv) Ist J maximal, so ist es abgeschlossen

2) Jedes Ideal in A ist in einem maximalen Ideal enthalten.

<u>Beweis:</u> 1) i) Sei $x \in \mathfrak{J}$ invertierbar in A, d.h. $x^{-1} \in A$

$\Rightarrow \quad e = xx^{-1} \in \mathfrak{J}$

$\Rightarrow \quad a = ae \in \mathfrak{J} \qquad \forall a \in A$

$\Rightarrow \quad A = \mathfrak{J}$

ii) Sei $x \in \mathfrak{J} \quad \Rightarrow \quad \|e - x\| \geq 1$

denn sonst $x = e - \underbrace{(e-x)}_{\|\cdot\| < 1}$ invertierbar (nach 11.6)

$\Rightarrow \quad \operatorname{dist}(e, \mathfrak{J}) \geq 1$

Da $0 \in \mathfrak{J} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{dist}(e, \mathfrak{J}) \leq \|e - 0\| = \|e\| = 1$

$\Rightarrow \quad \operatorname{dist}(e, \mathfrak{J}) = 1$

iii) $\operatorname{dist}(e, \mathfrak{J}) = 1 \quad \Rightarrow \quad e \notin \overline{\mathfrak{J}}$

$\overline{\mathfrak{J}}$ linearer Teilraum ✓

z.z.: $a \in A,\ x \in \overline{\mathfrak{J}} \quad \Rightarrow \quad ax, xa \in \overline{\mathfrak{J}}$

$x \in \overline{\mathfrak{J}} \Rightarrow \exists\, x_n \in \mathfrak{J}$ mit $x_n \to x$

$$\underset{\underset{\mathfrak{J}}{\cap}}{ax_n} \longrightarrow ax \qquad \text{(Stetigkeit der Multipl.)}$$

$\Rightarrow \quad ax \in \overline{\mathfrak{J}}$

iv) $\left.\begin{array}{l} \mathfrak{J} \subset \overline{\mathfrak{J}} \\ \mathfrak{J} \text{ maximal} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathfrak{J} = \overline{\mathfrak{J}}$

2) Zorn'sches Lemma

Sei $\mathfrak{J}$ Ideal in A

$\mathcal{Z} := \{ I \subset A \mid I \text{ Ideal in } A,\ \mathfrak{J} \subset I \}$

$\Rightarrow (\mathcal{Z}, \subset)$ induktiv geordnet denn: sei $\mathcal{K}$ Kette in $\mathcal{Z}$

$\Rightarrow I_{\mathcal{K}} := \bigcup_{I \in \mathcal{K}} I$ Ideal in A

und $I \subset I_{\mathcal{K}} \quad \forall I \in \mathcal{K}$

d.h. $I_{\mathcal{K}}$ obere Schranke für $\mathcal{K}$

$\overset{\text{Lemma von}}{\underset{\text{Zorn}}{\Longrightarrow}}$ $\exists$ maximales Element $I_0 \in \mathcal{Z}$

d.h. I_0 maximales Ideal in A mit $J \subset I_0$. $\square$

<u>12.6. Satz:</u> Sei A eine Banachalgebra und J ein abgeschlossenes Ideal in A. Dann wird der Quotientenvektorraum

$A/J = \{ a + J \mid a \in A \} \qquad (a + J = b + J \Leftrightarrow a - b \in J)$

mit den Operationen

$$\lambda(a+J) := \lambda a + J$$

$$(a+J) + (b+J) := a+b+J$$

$$(a+J)(b+J) := ab + J$$

und der Norm

$$\| a + J \| := \inf_{x \in J} \| a + x \| = \operatorname{dist}(a, J)$$

zu einer Banachalgebra und die Quotientenabbildung

$$\pi : A \to A/J$$
$$a \mapsto a + J$$

ist ein Homomorphismus.

<u>Beweis</u>: Operationen wohldefiniert: z. B.

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + J = a_2 + J \\ b_1 + J = b_2 + J \end{array}\right\} \overset{?}{\Longrightarrow} \quad a_1 b_1 + J = a_2 b_2 + J$$

denn: $$\left.\begin{array}{l} a_1 - a_2 \in J \\ b_1 - b_2 \in J \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 b_1 - a_2 b_2 = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\in J} b_1 + a_2 \underbrace{(b_1 - b_2)}_{\in J} \in J$$

$$\|(a+J)+(b+J)\| = \|a+b+J\| \leq \|a+b+x_1+x_2\| \qquad \forall x_1, x_2 \in J$$

$$\leq \|a+x_1\| + \|b+x_2\| \qquad -\text{"}-$$

$$\Rightarrow \|(a+J)+(b+J)\| \leq \|a+J\| + \|b+J\|$$

$e+J$ Eins von A/J

$$\|e+J\| = \operatorname{dist}(e, J) = 1 \qquad (12\,5.)$$

$$\|(a+J)\cdot(b+J)\| = \|ab+J\|$$

$$\leq \|ab + (ay + xb + xy)\| \qquad \forall x, y \in J$$

$$= \|(a+x)(b+y)\|$$

$$\leq \|a+x\| \, \|b+y\| \qquad -\text{"}-$$

$$\Rightarrow \|(a+J)\cdot(b+J)\| \leq \|a+J\| \, \|b+J\|$$

noch z.z.: A/J vollständig

Übungsaufgabe !

π Homomorphismus, klar: z. B.

$$\pi(ab) = ab + J = (a+J)(b+J) = \pi(a)\pi(b)$$

$\square$

12.7. Satz: Sei A eine kommutative Banachalgebra und

Σ die Menge aller komplexen Homomorphismen von A.

Dann gilt:

i) Jedes maximale Ideal von A ist der Kern von einem $\varphi \in \Sigma$.

ii) Für $\varphi \in \Sigma$ ist der Kern von φ ein maximales Ideal von A.

iii) $a \in A$ ist invertierbar $\iff \varphi(a) \neq 0 \quad \forall \varphi \in \Sigma$

iv) — " — $\iff$ Es gibt kein Ideal J in A mit: $a \in J$

v) $\lambda \in \sigma(a) \iff \varphi(a) = \lambda$ für ein $\varphi \in \Sigma$

d.h. $\sigma(a) = \{ \varphi(a) \mid \varphi \in \Sigma \}$

vi) Die Beziehung $\varphi \leftrightarrow \ker \varphi$ ist eineindeutig: $\ker \varphi_1 = \ker \varphi_2 \iff \varphi_1 = \varphi_2$

Beweis: i) Sei J maximales Ideal in $A \overset{12.5.}{\Longrightarrow} J$ abgeschlossen

$\overset{12.6}{\Longrightarrow} A/J$ Banachalgebra

wir zeigen: $A/J \cong \mathbb{C}$, dann ist $\pi: A \to A/J \cong \mathbb{C}$ gesuchter Homomorphismus

Sei $\pi(a) \neq 0$, d.h. $a \in A$, $a \notin J$

Setze $I := \{ ba + x \mid b \in A, x \in J \}$

$$\left.\begin{array}{l} I \text{ linearer Teilraum} \\ IA, AI \subset I \\ J \subset I \quad (b=0) \\ J \neq I \quad (b=1, x=0) \\ \qquad \Rightarrow a \in I \end{array}\right\} \overset{J \text{ maximal}}{\Longrightarrow} I = A$$

also: $e \in I$

d.h. $\exists\, b \in A, x \in J : ba + x = e$

$\Rightarrow \pi(b)\pi(a) + \underbrace{\pi(x)}_{=0} = \pi(e) = e$

$\Rightarrow \pi(x)$ invertierbar in A/J

also: Jedes Element $\neq 0$ in A/J invertierbar

$$\overset{\text{Gelfand-Mazur}}{\underset{11.10.}{\Longrightarrow}} \quad A/J \cong \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \quad \pi : A \to A/J \cong \mathbb{C}$$

also: $\pi \in \Sigma$ und $\ker \pi = J$

ii) Sei $\varphi \in \Sigma \Rightarrow J := \ker \varphi$ Ideal

$$\big(\varphi(x) = 0 \Rightarrow \varphi(ax) = \varphi(a)\varphi(x) = 0 \quad \forall a \in A$$
$$\varphi(e) = 1 \Rightarrow e \notin J \quad \big)$$

J maximal, da $\operatorname{codim} J = 1$: $A = J \oplus \mathbb{C} \cdot e$

$$\big(a \in A \Rightarrow a = \underbrace{(a - \varphi(a) \cdot e)}_{\in J} + \varphi(a) \cdot e \quad \big)$$

iii) Sei $a \in A$ invertierbar $\overset{12.2.}{\Longrightarrow} \varphi(a) \neq 0 \quad \forall \varphi \in \Sigma$

Sei a nicht invertierbar $\Rightarrow J := \{ba \mid b \in A\}$ Ideal $\quad (e \notin J)$

$\overset{12.5.}{\Longrightarrow} \exists$ maximales Ideal I mit $J \subset I$

$\overset{i)}{\Longrightarrow} \exists \varphi \in \Sigma : \quad I = \ker \varphi$

insbesondere also $\varphi(a) = 0 \quad (b = 1 \Rightarrow a \in J)$

iv) Sei a invertierbar $\overset{12.5.}{\Longrightarrow}$ a liegt in keinem Ideal

Sei a nicht invertierbar $\Rightarrow a \in J := \{ba \mid b \in A\}$ Ideal

v) $\lambda \in \sigma(a) \Leftrightarrow \lambda e - a$ nicht invertierbar

$$\overset{iii)}{\Longleftrightarrow} \exists \varphi \in \Sigma : \varphi(\lambda e - a) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \exists \varphi \in \Sigma : \lambda = \varphi(a)$$

vi) Sei $a \in A$: $a - \varphi_1(a) \cdot e \in \ker \varphi_1 = \ker \varphi_2$

$\Rightarrow \varphi_2(a - \varphi_1(a) \cdot e) = 0 \quad \Rightarrow \varphi_2(a) = \varphi_1(a)$, also $\ker \varphi_1 = \ker \varphi_2 \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$ $\square$

12.8 Satz: Sei A eine kommutative C^*-Algebra.

Dann gilt:

i) $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}$, falls $a \in A$ selbstadjungiert ist $(a = a^*)$

ii) $\sigma(u) \subseteq \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, falls $u \in A$ unitär ist

$(uu^* = u^*u = 1)$

iii) $\varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)} \quad \forall \varphi \in \Sigma', \ a \in A$

12.9. Bem.: Wegen 11.18 gelten die Aussagen dann analog zu 11.19 auch für beliebige C^*-Algebren.

Beweis: i) nach 12.7 v) z.z.: $\varphi(a) \in \mathbb{R} \quad \forall \varphi \in \Sigma$

Sei $\varphi : A \to \mathbb{C}$ komplexer Homomorphismus und

$\varphi(a) = \alpha + i\beta \qquad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, z.z.: $\beta = 0$

Betrachte $\quad b := a + ite \quad$ für $t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \varphi(b) = \varphi(a) + it\varphi(e)$$

$$= \alpha + i(\beta + t)$$

$$b^*b = (a - ite)(a + ite) = a^2 + t^2 e$$

also: $\quad |\varphi(b)|^2 \leq \|b\|^2 = \|b^*b\| \leq \|a^2\| + t^2 \qquad$ (da $\|\varphi\| = 1$, nach 12.2.)

$$\alpha^2 + (\beta + t)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t + t^2$$

$\Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t \leq \|a^2\| \qquad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \beta = 0$

$\Rightarrow \varphi(a) \in \mathbb{R} \quad \forall \varphi \in \Sigma$

$\Rightarrow \sigma(a) \subset \mathbb{R}$

ii) z.z.: $f(u) \in T \quad \forall f \in \Sigma$

Übungsaufgabe !

iii) Sei $x = \frac{a+a^*}{2}$

$y = \frac{a-a^*}{2i}$

d.h. $a = x + iy$ mit $x^* = x$, $y^* = y$

$$\Rightarrow f(a^*) = f(x - iy)$$
$$= f(x) - i f(y)$$
$$= \overline{f(x) + i f(y)} \quad (\text{da } f(x), f(y) \in \mathbb{R} \text{ nach i)})$$
$$= \overline{f(x+iy)}$$
$$= \overline{f(a)}$$

$\square$