13. Die Gelfand-Transformation

13.1. Beispiel: K kompakter Raum

$A := C(K)$

Dann gilt:

① φ kompl. Homom $\Leftrightarrow$ $\exists\, t \in K : \varphi(f) = f(t) \quad \forall f \in C(K)$

② J max. Ideal $\Leftrightarrow$ $\exists\, t \in K : J = \{ f \in C(K) \mid f(t) = 0 \}$

$① \xleftrightarrow{J = \ker \varphi} ②$

$① \Rightarrow ②$: $J = \ker \varphi$

$$= \{ f \in C(K) \mid \underbrace{\varphi(f)}_{f(t)} = 0 \}$$

$② \Rightarrow ①$: $\ker \varphi = \{ f \mid f(t) = 0 \}$

$$f \in C(K) \text{ beliebig} \Rightarrow f - \varphi(f)\cdot e \in \ker \varphi$$

$$\Rightarrow \underbrace{(f - \varphi(f)\cdot e)(t)}_{f(t) - \varphi(f)\cdot 1} = 0 \qquad \Rightarrow \varphi(f) = f(t)$$

Beweis von ①: $\varphi \in \Sigma \subset C(K)^* \;\hat{=}\;$ kompl. Maße auf C

d.h. $\varphi(f) = \int f(s)\, d\mu(s)$

z.z.: φ multiplikativ $\Rightarrow$ μ = Delta-maß,

d.h. $\exists\, t \in K : \mu = \delta_t$

$\Rightarrow \varphi(f) = \int f(s)\, d\delta_t(s) = f(t)$

Beweis von ②: $J_t = \{ f \in C(K) \mid f(t) = 0 \}$ ist max. Ideal

2.2: J maximales Ideal $\Rightarrow \exists t \in K : J = J_t$

Annahme: $\forall t \in K \ \exists f_t \in J, \ f_t \notin J_t$, d.h. $f_t(t) \neq 0$

$\Rightarrow \forall t \in K \ \exists$ Umgebung U_t und Fkt $f_t \in J: f_t(s) \neq 0$

$\forall s \in U_t$

$K = \bigcup_{t \in K} U_t \overset{K \text{ komp}}{\Longrightarrow} \exists$ endl. Teilüberdeckung,

d.h. $\exists f_{t_1}, \dots, f_{t_n} \in J: \ \forall s \in K$ gilt

$f_{t_i}(s) \neq 0$ für mindestens ein $i = 1, \dots, n$

Betrachte nun

$$f := \sum_{i=1}^{n} f_{t_i} \overline{f_{t_i}} \quad \in J$$

$\Rightarrow f(s) \neq 0 \quad \forall s \in K$

$\Rightarrow f$ invertierbar in $C(K)$ $\quad \left(f^{-1}(s) = \frac{1}{f(s)} \right)$

$\Rightarrow J$ enthält invertierbares Element

Wdsp (12.5)

$\Rightarrow \exists t \in K : J = J_t$

Fazit: $\Sigma_{C(K)} \ \hat{=} \ K$ als Mengen

$\varphi_t \leftarrow\!\shortmid t$ also $t \ \hat{=} \ \varphi_t$

mit $\varphi_t(f) = f(t)$ und

$f(t) = \varphi_t(f) = \hat{f}(\varphi_t)$

Topologie ?

13.2 Lemma: Sei A eine kommutative Banachalgebra und Σ die Menge aller komplexen Homomorphismen auf A. Dann gibt es genau eine Topologie τ auf Σ mit

i) (Σ, τ) kompakt

ii) Die Abb.
$$\hat{a} : \Sigma \to \mathbb{C}$$
$$f \mapsto \hat{a}(f) = f(a)$$

sind τ-stetig für jedes $a \in A$.

13.3 Erinnerung: Sei X Menge, $\tau \subset \mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subset X\}$ heißt Topologie auf X (und $\sigma \in \tau$ offen), falls gilt:

- $\emptyset \in \tau$

  $\bigcup_{i \in I} \sigma_i \in \tau$, falls $\sigma_i \in \tau$ ($i \in I$, I bel. Indexmenge)

- $X \in \tau$

  $\bigcap_{\text{endlich}} \sigma_i \in \tau$, falls $\sigma_i \in \tau$ (endlich viele i)

- $\forall\, x, y \in X$ mit $x \neq y$ $\exists\, \mathcal{U}_x, \mathcal{U}_y \in \tau$, $\mathcal{U}_x \cap \mathcal{U}_y = \emptyset$ und $x \in \mathcal{U}_x$, $y \in \mathcal{U}_y$

  (Hausdorff-Topologie)

$f : (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ stetig, falls

$f^{-1}(\sigma) \in \tau_1 \quad \forall\, \sigma \in \tau_2$

Seien $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ top. Räume

$\Rightarrow$ $\exists$ kanonische Produkttopologie τ auf

$$X := \prod_{i \in I} X_i \qquad (X \ni x = (x_i)_{i \in I}),$$

so daß alle Projektionen $(j \in I)$

$$\pi_j : X \to X_j$$
$$(x_i)_{i \in I} \mapsto x_j$$

stetig sind.

τ ist kleinste Top. mit dieser Eigenschaft,

explizit:

$$O \in \tau \Leftrightarrow O = \bigcup O_i \quad \text{mit } O_i \in \mathcal{B}$$

wobei

$$\mathcal{B} = \{ \prod_{i \in I} G_i \mid G_i \in \sigma_i \ \forall i \in I$$
$$G_i \neq X_i \text{ nur für endl. viele } i \in I \}$$

wesentlicher Satz:

Satz von Tychonoff: alle τ_i kompakt $\Rightarrow$ τ kompakt

<u>Beweis von 13.2</u>: Wir zeigen nur: Es gibt eine (kanonische) Topologie τ auf Σ mit diesen Eigenschaften!

Sei $a \in A$ und $k_a := \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq \|a\| \}$

$\Rightarrow k_a$ kompakt in $\mathbb{C}$

$\Rightarrow X := \prod_{a \in A} k_a$ kompakt (bzgl. Produkttopologie)

Betrachte

$$T : \Sigma \longrightarrow X$$
$$f \longmapsto (f(a))_{a \in A} \qquad \text{(beachte } |f(a)| \leq \|a\| \text{)}$$
12.2.

T injektiv

$$\operatorname{ran} T = \{ (x_a)_{a \in A} \mid x_e = 1, \; x_{ab} = x_a x_b, \; x_{\frac{a+b}{2}} = \tfrac{1}{2}(x_a + x_b), \; x_{\lambda a} = \lambda x_a \;\; \forall a, b \in A, \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| \leq 1 \}$$

$\subset X$ abgeschlossen in X (def. durch Gleichheit von stetigen Fkten)

$\Rightarrow \operatorname{ran} T$ kompakt bzgl. Produkttopologie τ_X

Identif. Σ mit $\operatorname{ran} T \subset X \leadsto$ Topologie auf Σ
$(\sigma \in \tau \Leftrightarrow \sigma = T^{-1}(\sigma')$ mit $\sigma' \in \tau_X)$

$\Rightarrow \tau$ kompakt

$\hat{a} : \Sigma \to \mathbb{C}, \quad f \mapsto f(a)$ d.h. $\hat{a}$ entspricht
$T(\Sigma) \to \mathbb{C} \quad (f(b))_{b \in A} \mapsto f(a)$ Projektion $\pi_a \Rightarrow \hat{a}$ stetig $\square$

13.4 Def: Sei A eine kommutative Banachalgebra.

1) Die Menge Σ aller komplexen Homomorphismen auf A versehen mit der kanonischen Topologie aus 13.2. heißt das <u>Spektrum von A</u>.

2) Die Abbildung

$$\hat{} : A \to C(\Sigma)$$
$$a \mapsto \hat{a}$$

mit $\hat{a}(\varphi) = \varphi(a)$

heißt <u>Gelfand-Darstellung</u> von A.

$\hat{a}$ heißt Gelfand-Transformierte von a.

13.5. Satz: Sei A eine kommutative Banachalgebra. Dann ist die Gelfand-Darstellung ein Algebrenhomomorph. und es gilt:

i) $\hat{a}(\Sigma) = \sigma(a) \quad \forall a \in A$

ii) $\|\hat{a}\| = r(a) \leq \|a\| \quad \forall a \in A$

iii) $\varphi_1, \varphi_2 \in \Sigma$ mit $\varphi_1 \neq \varphi_2 \Rightarrow \exists a \in A : \hat{a}(\varphi_1) \neq \hat{a}(\varphi_2)$

<u>Beweis:</u> Homomorph. da

$$(\lambda a + \mu b)^{\wedge}(\varphi) = \varphi(\lambda a + \mu b) = \lambda \varphi(a) + \mu \varphi(b) = \lambda \hat{a}(\varphi) + \mu \hat{b}(\varphi)$$
$$\widehat{ab}(\varphi) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \hat{a}(\varphi)\hat{b}(\varphi)$$
$$\hat{e}(\varphi) = \varphi(e) = 1$$

i) $\hat{a}(\Sigma) = \{ \underbrace{\hat{a}(\varphi)}_{\varphi(a)} \mid \varphi \in \Sigma \} \underset{\uparrow \atop \cdots}{=} \sigma(a)$

ii) $\|\hat{a}\| = \sup\limits_{\varphi \in \Sigma} |\hat{a}(\varphi)| = \sup\limits_{\varphi \in \Sigma} |\varphi(a)| = \sup\limits_{\lambda \in \sigma(a)} \lambda = r(a) \underset{\uparrow \atop \cdots}{\leq} \|a\|$

iii) Sei $\underset{\varphi_1(a)}{\hat{a}(\varphi_1)} = \underset{\varphi_2(a)}{\hat{a}(\varphi_2)} \quad \forall a \quad \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2$

$\square$

13.6. Satz von Gelfand-Naimark: Sei A eine kommutative C^*-Algebra. Dann ist die Gelfand-Darstellung $\hat{\ } : A \to C(\Sigma)$ ein isometrischer $*$-Isomorphismus.

Beweis: Jedes $a \in A$ normal $\Rightarrow r(a) = \|a\| \quad \forall a \in A$

d.h. $\|\hat{a}\| = r(a) = \|a\| \quad \forall a \in A$

d.h. $\hat{\ }$ isometrisch

$\Rightarrow \hat{A}$ abgeschlossene Unteralgebra von $C(\Sigma)$

13.5 iii) $\Rightarrow \hat{A}$ trennt Punkte von Σ

$\widehat{a^*}(\varphi) = \varphi(a^*) = \overline{\varphi(a)} = \overline{\hat{a}(\varphi)} \Rightarrow \widehat{a^*} = \overline{\hat{a}}$

also $\hat{a} \in \hat{A} \Rightarrow \overline{\hat{a}} \in \hat{A}$

$\xRightarrow{\text{Stone-Weierstraß}} \quad \hat{A} = C(\Sigma)$

$\square$

13.7. Satz: Sei A C^*-Algebra und $a \in A$ normal, d.h. $aa^* = a^*a$. Sei

$$C^*(a) := \overline{\{\text{Polynome in } a \text{ und } a^*\}}^{\|\cdot\|}$$

die kleinste C^*-Algebra, die a (und somit auch a^*) enthält. Dann ist $C^*(a)$ kommutativ, also

$$C^*(a) \mathrel{\hat{=}} C(\Sigma) \qquad \Sigma = \Sigma_{C^*(a)}$$

wobei Σ das Spektrum von $C^*(a)$ ist.

Außerdem ist

$$\Sigma_{C^*(a)} \mathrel{\hat{=}} \sigma(a) \qquad \text{als topologische Raum}$$

vermöge des Homeomorphismus

$$\hat{a} : \Sigma_{C^*(a)} \to \sigma(a)$$

Beweis: $\hat{a} \in C(\Sigma)$, d.h.

$$\hat{a} : \Sigma \to \mathbb{C} \quad \text{stetig}$$

von $\hat{a} = \{\hat{a}(\varphi) \mid \varphi \in \Sigma\} = \{\lambda \mid \lambda \in \sigma(a)\}$

$\Rightarrow \hat{a} : \Sigma \to \sigma(a)$ surjektiv

Sei $\hat{a}(\varphi_1) = \hat{a}(\varphi_2)$, d.h. $\varphi_1(a) = \varphi_2(a)$

$$\overset{12.8}{\Longrightarrow} \varphi_1(a^*) = \overline{\varphi_1(a)} = \overline{\varphi_2(a)} = \varphi_2(a^*)$$

$\Rightarrow \varphi_1(p(a,a^*)) = \varphi_2(p(a,a^*))$

$\forall$ Polynome $p(\cdot,\cdot)$ in zwei kommutierenden Variablen

$$\left.\begin{array}{l} \text{Polynome dicht in } C^*(a) \\ \varphi_1, \varphi_2 \text{ stetig} \\ (\text{da } \|\varphi_1\| = \|\varphi_2\| = 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \varphi_1(x) = \varphi_2(x) \\ \forall x \in C^*(a) \end{array}$$

d.h. $\varphi_1 = \varphi_2$

$\Rightarrow \hat{a}$ injektiv

$\Rightarrow \hat{a} : \Sigma \to \sigma(a)$ bijektiv

also: $\hat{a}$ ist stetige Bijektion zwischen kompakten Räumen und damit automatisch ein Homeomorphismus

("$\hat{a}^{-1} : \sigma(a) \to \Sigma$ stetig" einfache Übung

benutze: $f : X \to Y$ stetig

$\Leftrightarrow f^{-1}(\text{abg. Menge})$ ist abgeschl.)

$\square$

13.8. Satz (stetiger Funktionalkalkül für normale Elemente): Sei A C^*-Algebra und $a \in A$ normal.

1) Dann gibt es genau einen $*$-Homomorphismus

$$\Phi : C(\sigma(a)) \to A$$
$$f \mapsto \Phi(f)$$

mit

$$\Phi(z) = a \quad , \quad \text{wobei } z(\lambda) = \lambda$$

$z : \sigma(a) \to \mathbb{C}$

Wir schreiben auch $\Phi(f) =: f(a)$

2) Φ ist eine Isometrie, d.h.

$$\|f(a)\| = \|f\|_{C(\sigma(a))} = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |f(\lambda)|$$

und

$$\operatorname{ran} \Phi = C^*(a)$$

ist die kleinste C^*-Algebra, die a enthält.

(Beachte: $C^*(a)$ ist kommutativ, da a normal)

Beweis: i) Eindeutigkeit

Sei Φ wie im Satz

$\Rightarrow$ $\Phi(p)$ bestimmt für Polynome in z und $\bar{z}$

$$p(z) = \sum \alpha_{nm} z^n \bar{z}^m \Rightarrow \Phi(p) = p(a) = \sum \alpha_{nm} a^n a^{*m}$$

Falls $p_n \to f$ in $C(\sigma(a))$

$$\xRightarrow[\|\Phi\| \leq 1]{\text{Übung}} \Phi(p_n) \to \Phi(f) \quad \text{in } A$$

Stone-Weierstraß $\Rightarrow$ Polynome $p(z)$ liegen dicht in $C(\sigma(a))$

$\Rightarrow$ Φ ist auf ganz $C(\sigma(a))$ bestimmt !

ii) Existenz

Wir haben folgende Identifizierungen

$$\wedge : C^*(a) \to C(\Sigma_{C^*(a)}) \qquad \text{Gelfand-Isomorphismus}$$
$$y \mapsto \hat{y}$$

und

$$\hat{a} : \Sigma_{C^*(a)} \to \sigma(a)$$

also auch

$$C(\sigma(a)) \to C(\Sigma_{C^*(a)})$$
$$f \mapsto f \circ \hat{a}$$

Somit

$$C^*(a) \xrightarrow{\hat{}} C(\Sigma) \underset{\circ \hat{a}}{\overset{\circ \hat{a}^{-1}}{\rightleftarrows}} C(\sigma(a))$$

Also ist $\Phi(f)$ eindeutig bestimmt durch

$$\widehat{\Phi(f)} = f \circ \hat{a}$$

iii) Eigenschaften von Φ

- Isometrie

$$\begin{aligned} \| \Phi(f) \|_A &= \| \widehat{\Phi(f)} \|_{C(\Sigma)} \\ &= \| f \circ \hat{a} \|_{C(\Sigma)} \\ &= \sup_{\varphi \in \Sigma} | f(\hat{a}(\varphi)) | \\ &= \sup_{\lambda \in \sigma(a)} | f(\lambda) | \\ &= \| f \|_{C(\sigma(a))} \end{aligned}$$

- $\Phi(z) = a$

da $\widehat{\Phi(z)} = z \circ \hat{a} = \hat{a}$

- $\overline{f}(a) = f(a)^*$

da $\widehat{f(a)} = f \circ \hat{a}$

$\Rightarrow \widehat{f(a)^*} = \overline{\widehat{f(a)}} = \overline{f} \circ \hat{a}$

- Homomorphismus

$\widehat{(f+g)(a)} = (f+g) \circ \hat{a}$

$= f \circ \hat{a} + g \circ \hat{a} = \widehat{f(a)} + \widehat{g(a)}$

$= \widehat{f(a) + g(a)}$

$\Rightarrow (f+g)(a) = f(a) + g(a)$

$(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a)$ analog

$\square$